

DOI: 10.19650/j.cnki.cjsi.J2514450

# 测量不确定度评定方法新进展:从统计方法到神经网络间接评定法<sup>\*</sup>

陈文浩, 丁垠治, 宋仁成, 张进, 夏豪杰

(合肥工业大学仪器科学与光电工程学院 合肥 230002)

**摘要:**随着现代工业和科学研究所对测量精度的要求日益提高,测量不确定度的评定成为确保产品质量和优化生产流程的重要环节。传统的测量不确定度评定方法在静态、线性系统中应用广泛,但在面对高维、非线性或动态系统时逐渐暴露出局限性。近年来,非统计方法为复杂系统的不确定度评定提供了有效的补充,特别是神经网络技术,凭借其强大的数据处理能力和非线性建模特性,已成为不确定度评估的重要工具。首先,系统回顾了统计方法(测量不确定度表述指南及其蒙特卡洛方法)与非统计方法(如贝叶斯推断、灰色评定、模糊评定及最大熵评定)在测量不确定度评定中的基本原理、优势、局限性及典型应用场景。其次,进一步探讨了各类方法与机器学习相结合的最新研究进展与发展趋势。特别关注新兴的基于神经网络的不确定度间接评定方法,包括确定性模型、贝叶斯神经网络及集成学习方法,分析了不同建模与评估策略在复杂非线性系统中的应用潜力与局限性。最后,对现有测量不确定度评定方法的适用场景进行了归纳与比较,并展望了未来的发展方向。在保证评定效率与可靠性的前提下,不同方法的融合有望进一步提升复杂测量系统的建模能力与不确定度评估的可信度,降低对大量测量数据的依赖,以满足现代工业与科学研究中日益复杂的测量需求。

**关键词:** 测量不确定度; 灰色系统理论; 模糊评定; 神经网络

中图分类号: TH89 TB9 文献标识码: A 国家标准学科分类代码: 460.40

## Advances in measurement uncertainty evaluation: From statistical methods to neural network indirect evaluation

Chen Wenhao, Ding Yinye, Song Rencheng, Zhang Jin, Xia Haojie

(School of Instrument Science and Opto-electronics Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230002, China)

**Abstract:** As the demand for measurement accuracy intensifies in modern industry and scientific research, the evaluation of measurement uncertainty has become a crucial component in ensuring product quality and optimizing production processes. Traditional methods for assessing measurement uncertainty are widely applied in static and linear systems but have shown limitations when dealing with high-dimensional, nonlinear, or dynamic systems. In recent years, non-statistical methods have effectively complemented uncertainty evaluation for complex systems. In particular, neural network techniques, with their powerful data processing capabilities and nonlinear modeling capabilities, have become essential tools for uncertainty evaluation. This study provides a comprehensive review of statistical methods, including the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement and the Monte Carlo method, as well as non-statistical approaches such as Bayesian inference, grey evaluation, fuzzy evaluation, and maximum entropy evaluation. The fundamental principles, advantages, limitations, and typical application scenarios of each method are systematically analyzed. In addition, the recent trend of integrating these uncertainty evaluation methods with machine learning is discussed. Particular attention is given to emerging neural network-based indirect evaluation methods, including deterministic models, Bayesian neural networks, and ensemble learning frameworks. The modeling and evaluation strategies of these approaches are examined in the context of complex nonlinear systems, highlighting their potential and current limitations. Finally, the applicability of various uncertainty evaluation methods is summarized, and future research directions are outlined. The study suggests that the integration of multiple evaluation paradigms can enhance the

modeling capability and reliability of uncertainty estimation in complex measurement systems, reduce dependence on large data samples, and better address the increasingly intricate measurement requirements in modern industry and scientific research.

**Keywords:** measurement uncertainty; grey system theory; fuzzy evaluation; neural network

## 0 引 言

在现代工业生产和科学的研究中, 测量是确保产品质量、提升生产效率以及实现技术创新的基础性活动。测量结果的准确性直接影响到工艺控制、设备优化和产品性能。然而, 任何测量都不可避免地受到诸多不确定因素的影响, 这使得测量结果的不确定度评定成为测量工作中不可或缺的一部分<sup>[1]</sup>。对测量不确定度的科学评定, 不仅能够提升测量结果的可信度, 还能为后续决策和过程优化提供坚实依据。分析系统测量不确定度能够明确测量过程中各类误差的来源和影响, 帮助分析系统的性能和可靠性, 为量化和控制测量中存在的各种误差和偏差提供了方法论基础, 进而为改进测量方法、优化测量系统提供理论指导<sup>[2-3]</sup>。通过不确定度评定, 还可以实现不同测量方法和结果之间的标准化比较, 为工业生产和国际贸易中的质量管理和技术规范提供支撑。

测量不确定度理论大体上可以分为统计方法和非统计方法两大体系<sup>[4]</sup>。统计方法以概率统计为基础, 要求对系统的测量过程及各影响因素的概率分布有充分了解, 并能够通过大量的测量数据对不确定度进行传递。主要包括传统的测量不确定度表达指南 (guide to the expression of uncertainty in measurement, GUM) 和蒙特卡洛方法 (Monte Carlo method, MCM)。这两种方法由国际计量局及其他国际计量组织联合发布, 已成为国际公认的测量不确定度评定标准, 广泛应用于工业、科研和计量领域<sup>[5-6]</sup>。

然而, 随着测量对象的复杂性增加以及大数据技术的发展, 统计方法逐渐暴露出局限性。特别是在处理复杂系统、信息不足、动态特性显著或测量环境复杂等情况下, 传统的 GUM 和 MCM 可能无法有效提供可靠的不确定度评定<sup>[5-7]</sup>。例如, 在高维复杂系统中, MCM 需要大量的计算资源, 而 GUM 方法则要求明确的概率分布假设, 对于非线性或动态系统的适应性较差<sup>[8]</sup>。

随着数十年来计量科学的研究与发展, 传统 GUM 方法所带来的局限性逐渐被突破, 出现了一些非统计方法, 为测量不确定度评定提供了更多方法选择与支持, 成为测量不确定度评定方法的重要补充。贝叶斯推断<sup>[9-10]</sup>可以为复杂系统建立概率传递模型; 灰色系统理论<sup>[11-12]</sup>无需依赖大量样本或复杂的概率模型, 并在非线性系统建模与不确定度评估方面表现出众; 最大熵方法<sup>[13-14]</sup>可以在测量系统信息不完整或概率空间不完备的条件下进行

概率估计; 模糊评定法<sup>[15-16]</sup>在数据不完整或不确定性较高的测量系统中展现出独特的优势; 神经网络间接评定方法<sup>[17-20]</sup>则是在具有复杂非线性以及动态特征的系统建模中展现出显著优势, 能够有效捕捉输入与输出之间的高度非线性关系, 同时适应动态系统随时间变化的特性, 为测量不确定度的评估提供了强大的工具支持。

目前已经有一些国内外学者对测量不确定度评定方法进行了总结概述。陶猛等<sup>[17, 21]</sup>对目前主要的几种评定方法以及其应用进行了详细的总结; Da Silva Hack 等<sup>[18]</sup>总结了 2004 年到 2010 年间测量不确定度评定的相关方法及应用; Kusnandar 等<sup>[8]</sup>则是对 2011 年至 2022 年的文献进行了总结, 并着重比较了 GUM 与 MCM 的优劣。然而, 这些综述并未对非统计方法进行详细概述, 同时也忽略了对神经网络间接评定法这一重要方法的总结。本研究系统梳理了国内外学者在测量不确定度评定方面提出的理论方法, 比较了统计方法与非统计方法的优势和不足, 并对不同方法的适用场景进行了详细阐释。特别是针对近年来出现的神经网络间接评定方法, 结合未来发展的趋势, 进行了较为完整的综述, 旨在为复杂系统的测量不确定度评定提供理论参考和实践指导。

## 1 统计方法

GUM 方法<sup>[22]</sup>和 MCM<sup>[23]</sup>是目前测量不确定度评定的两种主要的统计方法, 不同方法的总结如表 1 所示。

GUM 方法基于误差传播理论, 提供了一个系统的框架来分析和评定测量不确定度。评定流程如图 1 所示, 包括: 分析测量不确定度的来源, 评定各来源的标准不确定度分量, 分析各不确定度分量之间的相关性, 最终通过合成不确定度分量计算合成标准不确定度及扩展不确定度并给出不确定度报告<sup>[1]</sup>。在 GUM 方法中, 不确定度按评定方法分为 A 类不确定度和 B 类不确定度。A 类不确定度通过对一系列观测数据的统计分析获得标准差, 其计算方法包括贝塞尔公式法、别捷尔斯法、极差法等; B 类不确定度则基于经验或其他信息, 如历史数据、相关经验或技术指标, 来评定其概率分布。通过方差合成定理合成 A 类和 B 类不确定度, 并通过包含概率确定包含因子, 并最终计算出扩展不确定度<sup>[5]</sup>。

GUM 方法适用于静态线性或近似线性模型, 具有清晰的理论基础, 能够为测量不确定度提供标准化和系统化的评定流程。然而, 当面对非线性模型或复杂系统时, GUM 方法的适用性受到限制, 因为灵敏系数、输入量

**表 1 测量不确定度评估方法**  
**Table 1 Measurement uncertainty evaluation methods**

方法	基本原理	适用范围	优势	局限性
GUM <sup>[5]</sup>	基于误差传播理论, 使用标准不确定度分量和方差合成定理, 通过统计分析计算不确定度	适用于静态、线性或近似线性测量系统	理论基础清晰, 适用于常规的线性测量系统, 易于实施和标准化	1. 不适用于复杂的非线性系统或多变量模型; 2. 对数据量要求高
MCM <sup>[6]</sup>	对系统模型随机采样生成大量样本, 以逼近后验分布或目标分布, 进行不确定度评估	广泛适用于静态和动态系统, 特别是非线性和高维问题	不依赖于线性假设, 能够处理复杂的非线性模型和多变量分布	1. 计算成本高; 2. 需要已知系统模型; 3. 收敛速度较慢, 效率低
贝叶斯推断法 <sup>[9]</sup>	通过先验分布和观测数据, 利用贝叶斯定理更新后验分布, 从而评估系统的不确定性	适用于静态与动态系统, 线性与非线性问题, 以及测量数据稀缺的系统	能够融合先验信息, 适应复杂模型, 提供系统的概率描述, 具有动态调整的能力	1. 先验选择敏感; 2. 计算开销大, 尤其在高维参数空间中; 3. 大规模数据可能需要复杂的采样技术
灰色评定法 <sup>[11]</sup>	基于灰色系统理论, 通过对系统内缺乏完全信息的数据进行建模和分析, 进行不确定度评估	适用于信息不完整或模糊的静态与动态系统, 尤其是在小样本或缺乏完整数据时	能有效处理信息不完整或不确定的情况, 适应性强	1. 对系统假设依赖较大; 2. 缺乏明确的数学模型; 3. 不适用于数据量较大的系统
最大熵评定法 <sup>[13]</sup>	最大熵方法基于信息理论, 通过最大化熵(即最小化信息缺失)来推断系统的概率分布, 进而评估不确定性	适用于未知概率分布或信息不完全的系统, 尤其是静态系统	能够在信息不足的情况下提供最为客观的分布估计, 不依赖于过多的假设	1. 对已知数据的分布假设较为敏感; 2. 对动态或高维问题时可能较为复杂
模糊评定法 <sup>[15]</sup>	利用模糊逻辑理论, 通过模糊集合和隶属度函数表示不确定性, 进行系统不确定度评估	适用于静态和动态系统, 特别是具有模糊性或不确定性较高的测量问题	能够处理不确定性和模糊性, 适应性强, 尤其对定性数据有优势	1. 缺乏严格的理论框架; 2. 计算复杂性高; 3. 且对隶属度函数的选择敏感
神经网络间接评定法 <sup>[17]</sup>	神经网络拟合输入输出关系, 通过评估网络的输出不确定性来量化测量系统的不确定度	适用于静态和动态系统, 特别是非线性系统	能有效捕捉复杂非线性关系; 无需显式建模, 自动从数据中学习; 小样本数据建模能力	1. 依赖数据质量和数量; 2. 缺乏物理解释; 3. 不确定度评估困难

之间的相关性以及有效自由度难以确定, 从而影响了评估结果的可靠性<sup>[5]</sup>。

与 GUM 方法相比, MCM<sup>[24]</sup> 不依赖于线性假设, 能够灵活地处理非线性模型和复杂分布的系统。作为一种基于随机抽样的数值模拟技术, MCM 通过大量随机样本逼近目标分布, 在高维复杂系统的测量不确定度评定中表现出显著优势<sup>[6]</sup>。MCM 的核心思想是通过随机抽样生成大量样本, 并利用这些样本对系统的参数或输出进行近似计算, 模拟待求参数的统计特性。其评定步骤包括: 1) 建立系统模型, 建立测量系统的数学模型并给定输入量的概率密度函数; 2) 输入数据采样并计算输出, 根据已知的概率分布对系统的输入变量进行随机抽样, 生成大量样本数据, 并通过系统模型得到大量输出结果; 3) 进行

统计分析并报告测量结果。MCM 的优势在于其灵活性, 能够适应非线性及复杂分布系统的不确定度评定, 且便于计算机编程实现, 因此广泛应用于航空航天<sup>[25]</sup>、机械设计<sup>[26]</sup>和临床医学<sup>[27]</sup>等领域。

MCM 的主要局限性在于计算成本高和收敛速度较慢, 这些因素限制了其在大规模数据或实时应用中的广泛使用。为了解决这些问题, 近年来的研究提出了若干改进方案, 如自适应 MCM 和分层 MCM。Gabrié 等<sup>[28]</sup> 提出利用自适应 MCM 通过非局部过渡核来增强 MC 采样, 显著提高了算法效率; Taverniers 等<sup>[29]</sup> 提出的分层 MCM 通过将多级 MCM 与输入样本空间的分层采样相结合, 减少了对复杂分布样本的需求, 特别在高维或非均匀分布的情况下展现出显著优势。此外, 叶苗<sup>[30]</sup> 利用 Sobol 序

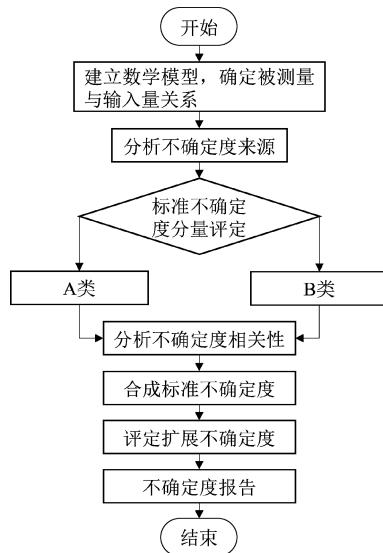


图1 基于GUM的测量不确定度评定流程

Fig. 1 Flowchart of measurement uncertainty evaluation based on GUM

列等确定性采样点替代随机采样,提出了准蒙特卡洛方法,用于透镜焦距数据误差分析,从而提高了测量不确定度的可靠性,提高计算稳定性。这些改进方案有效提升了MCM的效率和稳定性,推动了其在复杂系统测量不确定度评定中的应用。

总的来说,尽管MCM存在效率较低的问题,并且在多变量模型具有复杂分布和强相关性时,抽样分析变得困难,甚至可能无法实现,但它仍然是GUM方法的重要补充,能够在不依赖于传统线性假设的前提下,对复杂的非线性和高维问题进行灵活处理,为非线性模型的测量不确定度评定提供了重要的参考方法。

## 2 非统计方法

### 2.1 贝叶斯推断法

贝叶斯推断是一种基于贝叶斯定理的方法,通过结合先验知识和观测数据,得到未知参数的后验分布<sup>[9,31]</sup>,从而使用数值方法如马尔可夫链蒙特卡罗法<sup>[32]</sup>,从后验分布中采样,以计算输出量的不确定度。与GUM不同,贝叶斯方法以观测数据为基础,基于贝叶斯统计而不是经典统计学,将所有的未知参数视为随机变量,且都具有一定分布。而在GUM系列文件中,一般将未知的被测量视为一个确定性值<sup>[33-34]</sup>,测量不确定度主要来自于误差传播和统计分析。因此,与陶猛等<sup>[17]</sup>的研究一致,本研究将贝叶斯方法分类为非统计方法指的是非经典统计学方法。其不确定度计算的主要流程为:

首先定义系统模型以描述输入变量 $x$ 和输出被测变

量 $y$ 之间的关系,即:

$$y = f(x, \theta) + \varepsilon \quad (1)$$

其中,  $\varepsilon$  表示误差项,通常假设其服从正态分布,即  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 。然后利用先验知识(如历史数据或领域专家判断),为模型参数 $\theta$ 设定一个先验分布 $g(\theta)$ ,用于表示在没有观测数据时参数的分布知识。假设观测数据  $\{x_i, y_i\} (i = 1, 2, \dots, n)$  是独立同分布的,则似然函数  $g(y | \theta)$  如式(2)所示,表示给定参数 $\theta$ 下得到观测数据的概率。

$$g(y | \theta) = \prod_{i=1}^n g(y_i | x_i, \theta) \quad (2)$$

由于  $y_i$  同样服从正态分布,则:

$$g(y_i | x_i, \theta) = \frac{1}{s \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_i - f(x_i, \theta))^2}{2s^2}\right) \quad (3)$$

其中, 观测值  $y_i$  的样本均值  $\bar{y}$  和样本标准差  $s$  为:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (4)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (5)$$

根据贝叶斯定理,后验分布  $g(\theta | y)$  是先验分布和似然函数的更新结果,即:

$$g(\theta | y) = \frac{g(y | \theta)g(\theta)}{g(y)} \quad (6)$$

其中, 归一化常数  $g(y)$  表示观测数据的总可能性,即:

$$g(y) = \int g(y | \theta)g(\theta) d\theta \quad (7)$$

结合后验分布和系统模型,被测量的后验预测分布为:

$$g(y | x) = \int g(y | x, \theta)g(\theta | y) d\theta \quad (8)$$

被测量的估计值  $\hat{y}$  及标准测量不确定度  $u$  可以表达为<sup>[35]</sup>:

$$\hat{y} = E[g(y | x)] = \int yg(y | x) d\theta \quad (9)$$

$$u = \sqrt{\text{Var}[g(\theta | x, y)]} = \sqrt{\int (y - \hat{y})^2 g(y | x) d\theta} \quad (10)$$

由式(9)和(10)评定过程可以看出,先验分布的选择以及观测数据量对于不确定度的评定结果相当重要<sup>[36-37]</sup>。当  $n$  增大时,评定结果对先验信息的容错率增高,并且当获得新的观测数据时,可以通过迭代的方式在上一次评定的基础上对被测量进行不确定度评定。贝叶斯方法通过将历史数据、专家经验与观测数据有机结合,为测量不确定度的评估提供了灵活的框架。由于其不依赖于特定的测量模型,贝叶斯方法在非线性关系显著以及具有复杂相关性的测量系统中表现出独特的适用性和优势。

在实际测量和校准工作中, 贝叶斯方法的应用常常面临先验分布选择和后验分布解析的困难。特别是在对测量系统进行重复校准或不确定度评定时, 常常缺乏足够的先验信息, 这可能导致只能采用无信息先验或共轭先验。在建立贝叶斯模型时, 通常依赖经验或有限的测量数据来假设先验信息<sup>[38]</sup>。例如, 刘昊邦等<sup>[39]</sup>在舰空导弹命中概率试验中, 面对小样本试验数据量不足的问题, 通过选择正态-逆伽马分布作为先验, 从而弥补了数据不足的限制。然而, 不合理的先验分布可能对后验分布产生过大的影响, 导致评估结果产生较大偏差。特别是当数据量较小时, 不恰当的强信息性先验可能会抑制数据对后验分布的贡献, 导致结果偏离真实值。为此, 王军等<sup>[40]</sup>提出了采用稳健统计理论构造先验, 选取信息性弱但具有约束力的正态分布或正则化先验(如 Laplace 先验<sup>[40]</sup>和 Ridge 先验<sup>[41]</sup>), 以提高结果的鲁棒性<sup>[42]</sup>。在稳健统计的基础上, 徐永智<sup>[43]</sup>在评估滚动轴承摩擦力矩的不确定度时, 结合中位数估计与 Huber M 估计, 分析了时间序列数据的稳健性, 并构建了贝叶斯先验, 从而有效减小了置信水平与稳健数据边界值主观确定的误差。

此外, 选择非共轭先验分布可能导致后验分布难以解析, 从而增加计算复杂性, 尤其是在高维参数空间中<sup>[44]</sup>。例如, Jeffreys 先验常作为无信息性先验使用, 但在多参数情况下, 其表现通常不理想, 且可能导致不准确的结果<sup>[45]</sup>。殷泽凯等<sup>[46]</sup>通过使用 Jeffreys 先验描述工程机械产品的复杂退化过程, 并证明在先验条件独立的情况下, Jeffreys 先验可能会导致测量不确定度评定结果偏小。在雷达性能指标估计中, 杨磊等<sup>[47]</sup>考虑到先验知识与观测数据之间可能存在的非共轭特性, 提出了分层贝叶斯模型, 并采用贝叶斯变分推理法来计算后验分布, 从而显著降低了评价成本, 提高了效率。

另一方面, 后验分布的计算复杂性随着参数维度的增加而指数级增长, 因为需要在高维空间中进行积分以归一化分布。这种计算通常无法通过解析方法直接完成, 尤其当参数之间存在复杂相关性时<sup>[48-49]</sup>。传统的采样方法(如 Metropolis-Hastings 算法)效率较低, 可能导致采样结果无法充分覆盖整个参数空间, 从而出现计算收敛缓慢的问题<sup>[50]</sup>。为提高效率, Karimi 等<sup>[51]</sup>提出了结合局部和非局部二阶导数信息的哈密顿蒙特卡洛方法, 这一方法成功应用于贝叶斯推理和非线性逆问题, 显著提升了后验分布近似求解的效率和准确性。此外, 随着机器学习在高维问题求解中的优异表现, Grosnit 等<sup>[52]</sup>结合变分自动编码器与深度学习(deep learning, DL), 在高维和结构化输入空间中执行贝叶斯优化, 展示了机器学习在求解高维贝叶斯后验分布问题中的巨大潜力。

这些研究表明, 在贝叶斯方法应用中, 合理选择先验分布、优化采样方法以及结合现代机器学习技术, 能够有

效提升贝叶斯推断的效率和准确性, 为复杂、动态系统的不确定度评定提供强有力的支持。

## 2.2 灰色评定法

灰色评定法基于灰色系统理论, 尤其适用于信息不完全或数据量有限的测量系统。相比于传统方法, 灰色评定法无需依赖大量样本或复杂的概率模型, 而是以数据序列的累加生成和简单代数运算为核心, 避免了繁琐的数学推导和数值求解。其灵活的建模框架使其能够通过与神经网络或支持向量机等先进技术相结合, 进一步拓展适用范围, 并在增强非线性建模能力方面展现出显著的潜力。

1983 年邓聚龙教授<sup>[53]</sup>在研究小样本和不确定性问题时, 提出了灰色系统理论。该理论旨在解决信息不完全或不确定性较大的系统分析问题, 特别适用于数据有限或样本不足的场景。灰色系统理论的核心思想如图 2 所示。

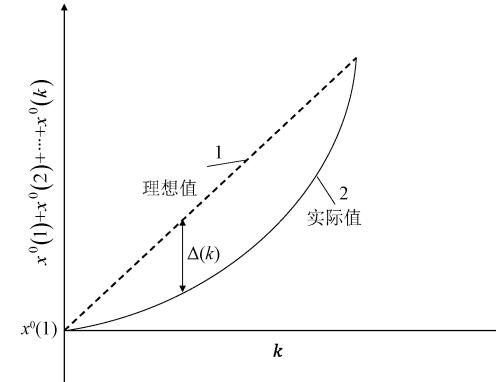


图 2 灰色评定法

Fig. 2 The grey evaluation method

灰色评定法是数据处理方法中的累加生成法, 即对同一个变量  $x$  进行  $n$  次重复测量时, 按照测量次数  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 排序, 测量结果可以合并为数据序列  $X^0$ , 即:

$$X^0 = (x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(n)) \quad (11)$$

根据灰色理论<sup>[11]</sup>, 经过一次累加后, 生成的新数列  $X^1$  为:

$$X^1 = (x^0(1), x^0(1) + x^0(2), \dots, x^0(1) + x^0(2) + \dots + x^0(n)) \quad (12)$$

理想情况下, 序列  $X^1$  是一组等差递增数列, 而实际测量过程由于测量误差的存在, 实际值(曲线 2)会一定程度上偏离理想值(虚线 1), 如图 2 所示, 其中  $\Delta(k)$  表示二值的差异程度。在此基础上, 朱坚民等<sup>[11,54]</sup>总结并提出了测量不确定度的灰色评定法, 通过定义  $\Delta(k)$  与样本标准差  $s$  之间的关系对测量不确定度进行评定, 即:

$$\Delta_{\max} = \max(\Delta(1), \Delta(2), \dots, \Delta(n)) \quad (13)$$

样本标准差  $s$  越大, 曲线 2 弯曲程度越大,  $\Delta_{\max}/n$  越大, 即:

$$s = \frac{c\Delta_{\max}}{n} \quad (14)$$

其中,  $c$  为灰色常系数, 可以由灰色模型或其他方法求出。

近年来, 灰色评定法在测量不确定度评定中的应用虽取得进展, 但仍存在一些局限性和挑战。Xia 等<sup>[55]</sup>通过制定测量结果的评价指标, 提出了灰色自助法, 解决了动态测量过程中不确定性评价的一些问题; 为了产生实时的评定结果, Song 等<sup>[12]</sup>使用多项式回归实时拟合交通流趋势函数, 动态生成上限和下限数据序列, 提出了一种自适应灰色预测区间模型来量化实时交通状况的不确定性; 面对小样本问题, 赵远方等<sup>[56-57]</sup>提出了通过改进的合成少数类过采样技术以及支持向量回归技术合成灰色小样本数据集, 解决了在极小样本下应用灰色评定法导致相对误差过大的问题; Cheng 等<sup>[58]</sup>采用改进的灰度法评估工业机器人的位置不确定度, 表明了该方法在极小样本下计算的标准差具有更高的精度; 针对复杂系统的多变量输入问题, 刘寒冰等<sup>[59]</sup>利用多变量灰色模型 MGM(1,  $n$ ) 实现对路基中相互影响的多个监测点变形预测模型的建模和预测; 熊远南<sup>[60]</sup>以燃煤电厂水务系统为研究对象, 基于灰色理论和多元非线性回归分析, 分别建立影响水量各因素的灰色预测模型 GM(1, 1), 实现了对灰色多变量系统的不确定度评定。

随着机器学习和 DL 技术的快速发展, 灰色系统的数学基础薄弱和非线性适应能力不足的问题得到了有效地解决<sup>[61-62]</sup>。王中宇等<sup>[61]</sup>提出了一种基于径向基函数神经网络(radial basis function neural network, RBFNN) 的虚拟仪器测量模型, 并结合灰色评定法用于评估各误差源之间的相关系数, 有效地克服了传统测量不确定度评定方法对测量方程显式性、解析性和线性化的限制, 在处理复杂测量系统的不确定性问题中具有显著优势; Wang 等<sup>[63]</sup>提出一种基于强化学习的灰色预测方法并应用在网络流量传输问题上, 引入校正因子提高了灰色模型的小样本预测性能; 与灰色理论的结合使得神经网络

建模更具泛化性和稳健性, Zhang 等<sup>[64]</sup>利用灰色系统的小样本建模功能来增强神经常微分方程的整体泛化性, 有效地增强了其对有限非线性数据的预测能力。

然而, 灰色评定法的适用性主要集中于测量系统的数据量有限、信息不完全以及系统特性相对简单的场景。在面对大样本、高维复杂系统或强噪声干扰的情况下, 其适用性可能受到显著限制。因此, 为提高不确定度评定的准确性和可靠性, 应结合其他方法或选择更为适配的替代技术。未来灰色评定法有望在不确定性评价领域取得进一步突破, 引入机器学习技术, 优化数学模型, 开发混合评价框架, 扩大其在多变量应用领域的适用性。这将在扩展其在高维、动态和非线性场景中的应用潜力的同时, 为复杂系统的测量不确定性评估提供更加高效和灵活的解决方案。

### 2.3 模糊评定法

模糊评定法通过结合定性评价与定量分析, 利用模糊数学理论有效处理不确定性和模糊性问题, 尤其在数据不完整或不确定性较高的测量系统中展现出独特的优势。其灵活的数学框架能够同时处理随机和非随机效应, 并通过自定义隶属函数和模糊规则适应不同场景需求。此外, 与现代技术的结合进一步拓展了其应用范围, 使其在非线性、动态系统及复杂多源数据分析中表现出显著的适用性。

模糊数学的基础由 Zadeh<sup>[65]</sup>在 1965 年提出的模糊集理论奠定。模糊集理论是一种处理模糊性、不确定性和不完全性问题的数学工具, 通过隶属函数  $\mu(x)$  描述元素  $x (x \in X)$  对集合的隶属程度, 模糊集  $\tilde{A}$  是一组有序对, 即:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \quad (15)$$

其中,  $\mu_A(x) (0 \leq \mu_A(x) \leq 1)$  表示元素  $x$  在集合  $A$  中的隶属度, 当  $\mu_A(x) = 0$ , 表明  $x$  完全不属于集合;  $\mu_A(x) = 1$ , 表明  $x$  完全属于集合。2001 年 Mauris 等<sup>[15]</sup>结合模糊理论与置信区间, 提出了测量不确定度的模糊评定法。模糊推理过程如图 3 所示。

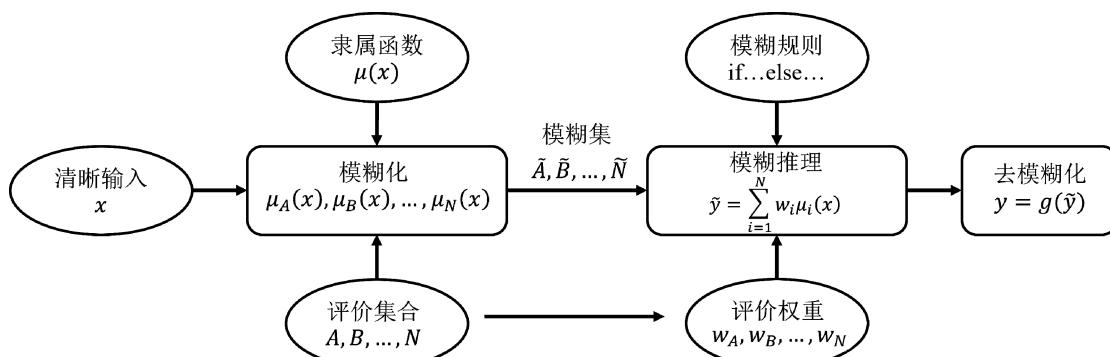


图 3 模糊评定法流程

Fig. 3 Fuzzy evaluation method flowchart

首先, 模糊化过程使用隶属度函数将清晰的输入值  $x$  根据不同的评价指标所定义的集合转换为不同的隶属度, 表示输入值属于每个定义的模糊集的程度; 其次, 对各评价指标赋予权重  $w_i$ , 反映每个指标在整体评估中的相对重要性。权重通常满足如式(16)所示约束条件, 即:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (16)$$

然后, 模糊推理通过定义系统行为的模糊规则及权重将模糊集转化为模糊输出集, 即综合隶属度  $\tilde{y}$ 。隶属度函数起着至关重要的作用, 在模糊化和去模糊化过程中, 它将输入空间中的每个点映射到 0~1 范围的隶属度值。最后, 去模糊化步骤使用各种方法将模糊输出集转换回清晰的输出值, 例如质心法、最大隶属度法和加权平均法等。其中, 质心法是一种广泛应用的标准方法, 通过计算模糊输出集的重心来获得清晰值<sup>[16]</sup>。

在不确定度评定中, 置信区间通常表示测量值在一定概率范围内可能取值的区间范围。而模糊集理论通过隶属函数对置信区间进行描述, 将“可能性”替换为隶属度的形式, 再通过解模糊化或以分散范围来表征不确定度<sup>[66]</sup>。2005 年测量不确定度表达指南的增补版中已经通过使用模糊变量(fuzzy variable, FV) 和随机模糊变量(random fuzzy variable, RFV) 来表示测量不确定度的决定<sup>[67]</sup>, 并且制定了完整的数学框架处理 RFV<sup>[68]</sup>。RFV 的方法考虑并处理了单个数学对象中对不确定度的随机和非随机贡献, 并且在非随机效应不可忽略或对不确定度的不同贡献的了解非常有限的应用<sup>[69]</sup> 中 RFV 的完整评定流程显示出了比 GUM 更可靠的不确定度评定结果<sup>[70-71]</sup>。

Ferrero 等<sup>[72]</sup> 将 RFV 方法应用于对电阻进行直流测量的不确定性估计中, 并在 2008 年提供了一种通用方法来利用可用的相关计量信息来构建 RFV, 证明其比 GUM 可以提供更好的不确定度评估的能力<sup>[73]</sup>。在此基础上, 蒋薇等<sup>[74]</sup> 总结了一种更一般化的不确定度评定和表示的 RFVs 方法, 系统评述了其关键技术与难点, 表明 RFVs 方法在非线性测量函数中传递不确定度具有简单高效的特点; 吕晓娟等<sup>[75]</sup> 基于模糊集合理论的基本原理, 提出了一种用于新一代全球定位系统(global positioning system, GPS) 测量不确定度评定的模型。该模型以优化理论为基础, 通过最大模范数最小的逼近方法, 获得了最优解, 为 GPS 测量系统中不确定度的量化提供了创新性解决方案。Yilmaz 等<sup>[76]</sup> 利用自适应更新中心和宽度的隶属函数为非线性机械系统设计了稳定的速度观测器, 实现了观测器设计中改进的不确定补偿问题; Tang 等<sup>[16]</sup> 证明了模糊逻辑在解决不确定非线性系统控制问题方面的潜力。此外, 模糊推理系统与 DL 的结合已经被证明可以显著提高预测和分类精度, 尤其是在处理不确定性、

多源数据和复杂模式识别等领域显示出显著的效果<sup>[77-79]</sup>。

模糊评定法的适用性主要集中在信息不完全或不确定性较高的情境中, 但在面对大样本、高维度、强噪声或极端复杂系统时, 其效果可能受到限制<sup>[16]</sup>。特别是当系统的行为较为复杂、非线性关系较强或数据之间的依赖性较高时, 模糊评定法可能无法提供足够的精度。此外, 模糊规则的构建和隶属度函数的选择需要经验指导, 且在一些高度复杂的应用中, 规则设计和推理过程的效率可能成为瓶颈。

今后模糊评定法的改进方向可以集中在 3 个方面: 1) 通过引入机器学习和 DL 技术, 实现自动化优化隶属函数和模糊规则, 以提高方法的自适应能力和精度<sup>[80]</sup>; 2) 结合大数据分析和高效计算方法, 提升其在高维度和大规模数据中的应用性能<sup>[81]</sup>; 3) 探索多方法融合策略, 将模糊评定与其他不确定度评估方法(如贝叶斯推断、蒙特卡罗方法等)结合, 形成更强大的混合评定框架, 以更好地处理复杂、不确定性强的系统。

## 2.4 最大熵评定法

最大熵评定法是一种基于熵最大化原理的不确定度评定方法, 可以简述为: 在信息有限或概率空间不完备的条件下进行概率估计时, 应根据现有信息选择使得熵最大的概率分布, 即保持最大的随机性和最小的主观偏见<sup>[82-83]</sup>。利用最大熵方法计算测量不确定度时的基本流程为:

1) 基于已有的测量数据或先验知识, 设定不确定度评定的约束条件。

2) Shannon 熵<sup>[84]</sup> 常被用于定义在满足已知约束条件下, 概率分布的不确定性最大化问题, 对于有限区间  $[-L, L]$  的连续型随机变量  $X$ , 即:

$$H(X) = - \int_{-L}^L p(x) \ln p(x) dx \quad (17)$$

其中,  $p(x)$  为  $X$  的分布密度, 假设已知约束条件为:

$$\int_{-L}^L p(x) dx = 1 \quad (18)$$

$$\int_{-L}^L xp(x) dx = \mu_0 \quad (19)$$

3) 估计目标是在满足上述约束条件下, 选择使得熵  $H(X)$  最大的概率分布  $p(x)$ <sup>[85]</sup>。通常采用拉格朗日乘数法计算  $H(X)$  在约束条件下的极值以得到  $p(x)$  的通解, 令:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ - \int_{-L}^L p(x) \ln p(x) dx - \lambda_0 \left[ \int_{-L}^L p(x) dx - 1 \right] - \right. \\ & \left. - \lambda_1 \left[ \int_{-L}^L xp(x) dx - \mu_0 \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

其中,  $\lambda_0$  和  $\lambda_1$  为拉格朗日乘子。引入常数  $c$  和  $\lambda$ , 根据式(20)求得  $p(x)$  的通解为:

$$p(x) = ce^{-\lambda(x-\mu_0)}, \quad -L \leq x \leq L \quad (21)$$

4) 结合式(21), 测量不确定度为:

$$u = \sqrt{\int_{-L}^L (x - \mu_0)^2 p(x) dx} \quad (22)$$

最大熵方法为测量不确定度的评定提供了一种基于信息论的有力工具, 能够在缺乏完整数据的情况下, 通过最大化熵值来推导最优的概率分布。其优势在于信息的高效利用和对复杂系统的不确定性量化能力, 但其有效性依赖于合理的约束条件设定。谌贝等<sup>[13]</sup>利用最大熵的方法对 GUM 标准中纯铜的线性热膨胀系数的实例进行了测量不确定度评定证明了最大熵方法在遵循 GUM 标准的前提下, 能够更灵活地处理测量数据的不确定性问题; 刘智敏<sup>[14]</sup>探讨了在被测量服从界限未知的均匀分布的情形下, 最大熵法应用的有效性问题; 钟浩等<sup>[86]</sup>认为在小样本数据下, 基于原点矩约束最大熵原理求得的测量不确定度不够准确可靠, 提出基于数据归一化原点矩约束最大熵原理的小样本数据测量不确定度评定方法。

除了 Shannon 熵, Tsallis 熵<sup>[87]</sup>和邓熵<sup>[88]</sup>也被广泛研究, 并被证明是处理不确定性问题的有效工具。Jizba 等<sup>[89]</sup>援引估计理论中已知的最大熵原理来揭示广义不确定性原理中相关量子理论的准经典(退相干)极限与 Tsallis 的非广泛热统计学之间的联系; Gao 等<sup>[90]</sup>研究表明通过最大邓熵分离规则分离的基本概率分配的不确定性大于原始概率分配的最大邓熵; 为了评定随机排列集(random permutation set, RPS)的不确定度, Deng 等<sup>[91]</sup>提出了 RPS 熵, 当忽略排列事件中元素的顺序时, 最大 RPS 熵将退化为最大邓熵。当每个排列事件仅限于包含一个元素时, 最大 RPS 熵将退化为最大香农熵。

总而言之, 最大熵法适用于信息不完全或缺乏先验知识的情况, 尤其适合处理复杂且具有较大不确定性的测量系统。特别是在数据有限或概率空间不完备的情况下, 能够通过最大化熵值推导出最优的概率分布。然而, 当约束条件设定不明确或过多时, 最大熵法的有效性可

能受到限制; 此外, 在小样本数据或高噪声环境下, 最大熵法可能会产生偏差<sup>[92]</sup>。未来的研究可聚焦于优化约束条件的设定, 结合其他方法提升其对复杂非线性系统的适应性, 并探索其在量子统计和 DL 等新兴领域中的应用, 以拓展其在不确定度评定中的适用范围。

### 3 神经网络间接评定法

在仪器仪表和测量(instrumentation and measurement, I&M)领域, DL 方法被广泛用于间接测量过程的建模与数据反演<sup>[93]</sup>。作为一种强大的数据驱动建模技术, DL 在测量不确定度评定中正受到越来越多的关注<sup>[17-18, 94-95]</sup>。其方法的应用从传统测量方法的不足入手, 通过 DL 的非线性建模能力和数据处理优势, 为复杂系统的测量不确定度评定提供了全新的解决方案。

与许多其他测量不确定度评定方法类似, DL 方法的第一步是建立系统的测量模型。然而, 不同于传统的解析建模方法, DL 通过神经网络这一通用函数逼近器, 构建系统的“黑箱”模型<sup>[96]</sup>, 因此也被称为神经网络间接评定法。神经网络是一种由网络参数  $\theta$  所参数化的非线性函数  $f_\theta$ , 其主要功能是将测量系统的输入量  $x_i (i = 1, \dots, n)$  映射到对应的输出观测量  $y_i (i = 1, \dots, n)$ ,  $n$  表示测量次数<sup>[97]</sup>。这一特性使得 DL 方法能够灵活地适应复杂非线性系统的建模需求, 特别是在传统方法难以刻画的高维、非线性场景中表现出显著优势<sup>[98-99]</sup>。

如图 4 所示, 假设  $y_{\text{pred}}$  表示神经网络的预测值  $y_{\text{pred}} = f_\theta(x_i)$ , 网络训练的目标值为:

$$y_i = y_{\text{pred}} + b \quad (23)$$

其中,  $b$  表示  $y_{\text{pred}}$  与  $y_i$  之间的预测偏差。在 I&M 中, 由于测量过程中的误差和随机干扰等因素, 系统输出被测量  $Y$  的测量结果不是一个确定的值, 而是测量结果可能发生的区间, 包含被测量估计值  $y_{\text{est}}$  与分散性参数, 即测量不确定度  $U_{\text{est}}$ <sup>[95, 100]</sup>:

$$Y = y_{\text{est}} \pm U_{\text{est}} \quad (24)$$

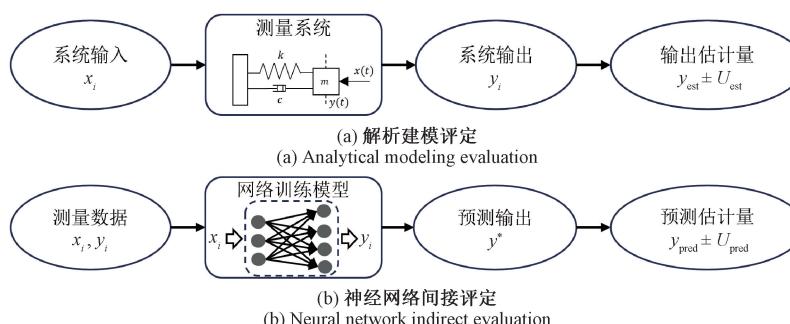


图 4 测量不确定度的不同评定方法

Fig. 4 Different evaluation methods for measurement uncertainty

其中, 估计值  $y_{\text{est}}$  是通过对观测值  $y_i$  进行处理得到的, 可以看作是从  $Y$  中随机抽取的值。

将式(24)类比到网络模型中, 可以得到:

$$Y = y_{\text{pred}} \pm U_{\text{pred}} \quad (25)$$

其中,  $U_{\text{pred}}$  表示网络预测结果的不确定度。需要强调的是, 不同的建模方法对测量结果及其相关不确定度

产生不同的估计值, 不确定度反映了测量结果的可靠性程度。通过比较式(24)和(25), 可以得出结论,  $U_{\text{pred}}$  和  $b$  表现出强烈的相关性, 这对于通过预测误差验证不确定度的可靠性至关重要。

与任何其他测量系统类似, DL 系统的测量不确定度主要来源于两种效应: 模型效应和随机效应<sup>[18, 101]</sup>, 如图 5 所示。

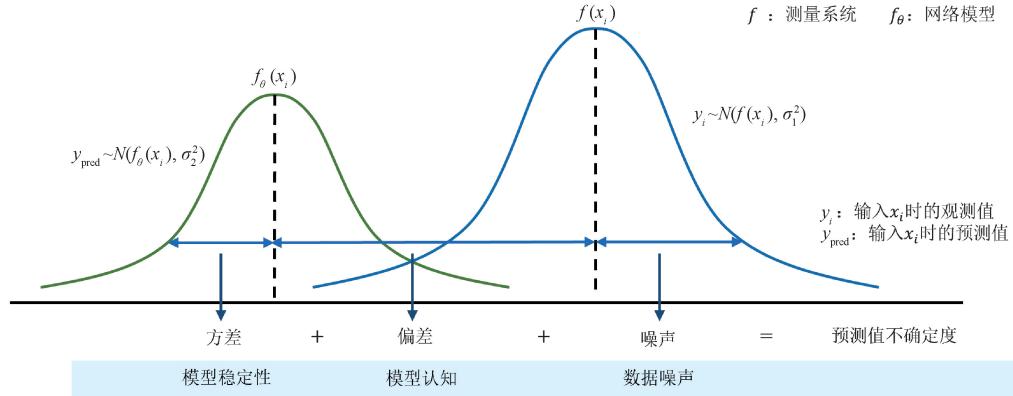


图 5 神经网络测量不确定度的组成因素

Fig. 5 Components of measurement uncertainty in neural networks

模型效应是由神经网络本身的建模能力所决定的, 当网络模型的训练不足或其结构设计与实际问题的复杂度不匹配时, 可能导致模型对测量系统的映射关系描述不充分, 进而引入模型不确定度<sup>[101]</sup>, 其本质是由于神经网络未能充分拟合实际系统的测量规律而导致的认知偏差, 可以表述为模型参数的概率分布。另一方面, 随机效应则源于实际测量过程中固有的随机性以及噪声等因素<sup>[102-103]</sup>。采集频率不当<sup>[104-105]</sup>、环境温度变化, 以及测量仪器的有限精度<sup>[106]</sup>等, 都会导致数据采集时的不可避免的波动, 产生数据噪声。这些随机性会导致测试数据的波动性, 并影响模型的稳定性, 最终在网络预测中引入数据不确定度<sup>[101, 107]</sup>。综合来看, DL 系统的测量不确定度可以理解为模型不确定度和数据不确定度的叠加效应。在贝叶斯框架中<sup>[108]</sup>, DL 中的数据不确定度可以形式化为网络模型  $f_\theta$  输出预测值  $y_{\text{pred}}$  的概率分布, 而模型不确定度被形式化为在给定数据集  $D$  下模型参数  $\theta$  的概率分布, 即:

$$p(y_{\text{pred}} | x_i, D) = \underbrace{p(y_{\text{pred}} | x_i, \theta)}_{\text{Data}} \underbrace{p(\theta | D)}_{\text{Model}} \quad (26)$$

可以通过单一确定性方法<sup>[101, 109]</sup>、贝叶斯神经网络方法 (Bayesian neural networks, BNN)<sup>[110-111]</sup>、集成学习 (ensemble learning, EL) 方法<sup>[112-113]</sup>等对网络预测结果的测量不确定度进行评估。

### 3.1 单一确定性方法

确定性神经网络通过一次前向传递便可估计不确定性, 其网络参数是固定的, 因此每次前向传递都会产生相同的结果<sup>[101, 109]</sup>。其基本思想是估计深度学习模型在嵌入特征空间中靠近测试点的训练点密度, 并将该密度估计作为认知不确定性的度量。通过在神经网络分类器的最后一层引入 SoftMax 函数, 或在回归器中添加高斯输出层, 可以有效地捕捉样本的随机不确定性<sup>[109, 114]</sup>。

确定性方法将不确定度估计嵌入到神经网络的训练过程中, 通常通过调整网络结构或引入特定的目标函数, 将减小预测不确定度作为优化目标之一。大多数方法考虑了预测分布和真实分布之间的差异, 遵循贝叶斯框架中通过预测参数分布来估计不确定度的思想。比如, Van Amersfoort 等<sup>[115-116]</sup>基于径向基函数 (radial basis function, RBF) 神经网络, 利用新颖的损失函数和质心更新方案对预测结果的不确定度进行评估; Mukhoti 等<sup>[117]</sup>通过残差连接和频谱归一化, 在具有正则化特征空间的 SoftMax 网络中实现了认知不确定度的评估, 并在语义分割等大规模视觉任务中取得了良好表现; Amini 等<sup>[118]</sup>在图像深度预测中, 通过在原始高斯似然函数上加入证据先验, 训练神经网络推断证据分布的超参数, 同时引入证据正则化项, 有效评估了回归问题中数据的任意不确定度和模型预测的认知不确定性。

另一方面, 网络也可以通过增加额外的隐藏层来计算不确定度。Kanazawa 等<sup>[119]</sup>提出通过在输入向量中插入噪声向量的嵌入层以及选择合适的激活函数, 能够以非参数方式对复杂的多模态分布进行建模, 有效评估预

测不确定性; Liu 等<sup>[120]</sup>通过对深度神经网络进行谱归一化处理, 并将输出层替换为高斯过程层, 从而提升模型的距离感知能力, 进而有效计算预测不确定性, 并在多种数据集和任务中展现了良好的性能和优势。

与其他深度学习方法相比, 确定性方法在训练和评估效率上具有显著优势, 因为它们通常只需训练一个网络模型, 而无需进行多次训练或依赖复杂的模型集成。这使得该方法在计算资源和时间消耗上表现出较大的优势。然而, 确定性方法的主要挑战在于其对网络训练质量的高度依赖, 网络性能在很大程度上受到训练数据质量、数据量以及训练过程中超参数设置和优化策略的影响, 因此确定性方法对训练数据的选择以及训练过程中的过拟合或欠拟合问题较为敏感。确保训练数据的代表性, 并避免训练过程中的不稳定性, 是提升确定性方法性能的关键。

### 3.2 贝叶斯神经网络

BNN 通过为模型参数引入概率分布来量化不确定度, 其核心思想是在传统神经网络的权重参数上构建贝叶斯分布。具体来说, BNN 中的权重参数  $\theta$  被建模为服从高斯分布的随机变量而不是固定值, 如图 6 所示, 假设其分布为  $p(\theta)$ 。目标是通过训练数据  $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$  学习参数的后验分布  $p(\theta|D)$ , 并通过式(25)计算预测值的概率分布来估计测量不确定度。

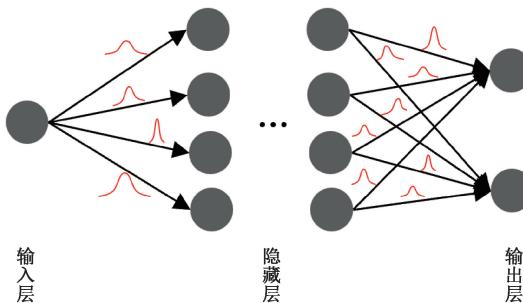


图 6 贝叶斯神经网络结构

Fig. 6 Structure of Bayesian neural networks

Zhang 等<sup>[121]</sup>在土壤特性预测模型的建模中采用了变分推断方法来估计模型的预测不确定性, 成功地量化了模型在不同输入条件下的预测可靠性。这一方法不仅有效应对了复杂系统中的噪声和不完全数据问题, 还为岩土工程设计提供了更加可靠的决策支持, 基于 BNN 的预测框架展示了其在岩土工程领域中的巨大应用潜力; 李明轩等<sup>[110]</sup>在预测测井渗透率参数的研究中, 将数据分布变换与 BNN 相结合, 通过变分推断求解模型的后验分布, 从而实现了对渗透率的高精度预测。研究表明, 该方法预测的渗透率与盲井的真实渗透率高度吻合, 验证了其在实际应用中的有效性和可靠性。对于小样本问题, Schodt<sup>[122]</sup>提出了一种基于无迹变换的方法, 仅用 3 个确定性样本传播统计矩, 成功实现了对具有任意非线性层

的 BNN 的高效推断; 为了提高 BNN 的物理可解释性, Izzatullah 等<sup>[123]</sup>提出将物理信息神经网络 (physics-informed neural networks, PINNs) 与 BNN 相融合, 来预测地震的震中位置, 并利用拉普拉斯方法近似后验分布, 实现不确定度的传播。

采样技术作为贝叶斯推理方法的一种, 已广泛应用于深度学习中的不确定性量化与模型推理。MCM 是一种高效的采样技术, 通过随机抽样生成样本来近似计算后验分布。然而, 传统 MCM 在深度学习模型中的计算开销较大, 尤其是在处理大规模数据集或复杂神经网络时, 计算效率成为其应用的瓶颈。为了解决这一问题, 研究者提出了 MC Dropout 方法, 这是一种结合 Dropout 技术的高效采样方法<sup>[124-125]</sup>。MC Dropout 通过将 Dropout 作为正则化项引入神经网络训练过程中, 随机丢弃部分神经元, 使每次前向传播时网络结构有所不同。这一过程可以视为伯努利分布的随机变量, 其概率由 Dropout 率决定。通过这种方式, MC Dropout 在不增加计算复杂度的情况下, 近似实现变分推理, 从而为 BNN 提供有效的后验分布估计。通过启用 Dropout 并进行多次前向传递, 从而生成多个网络输出, 即:

$$p(y_{\text{pred}} | x, D) \approx \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T p(y_{\text{pred}} | x, \theta_i), \theta_i \sim q(\theta) \quad (27)$$

其中,  $T$  为采样次数, 这些输出的平均值提供了对模型预测的点估计, 而其方差则反映了预测的不确定度。

在应用方面, Gal 等<sup>[124]</sup>利用 Dropout 近似贝叶斯推理, 并将方法应用在二氧化碳浓度检测及太阳辐照度检测问题上, 推动了深度学习在处理不确定度方面的发展; 而后 Gal 等<sup>[125]</sup>提出了离散 Dropout, 允许网络自动调整 Dropout 率, 在计算机视觉上的应用表明这种方法大大提高了模型的效率以及不确定度的可靠性; 朱挺等<sup>[126]</sup>结合 BNN 和长短期记忆网络, 对钢铁轧制流程中的热轧轧辊剩余寿命进行了动态测量不确定度预测; Feng 等<sup>[127]</sup>针对条纹投影成像技术, 利用 Dropout 实现贝叶斯卷积神经网络, 不仅从单个条纹图案中检索相位, 而且还生成描绘像素置信度的不确定性图, 表明了 BNN 在解决光学成像问题不确定度评估方面的巨大潜力。

总而言之, BNN 在评估测量不确定度方面具有明显优势, 尤其在小样本数据、多源数据融合学习中。它能有效建模预测不确定性, 适用于复杂的仪器系统, 并通过结合先验知识在有限数据下提供稳健推断。然而, BNN 也存在一些局限性, 首先, 高维后验推断的计算资源需求量较大, 不适用于实时或大规模数据处理。其次, BNN 对先验选择敏感, 不当的先验可能会导致较大的预测误差。此外, BNN 的复杂性较高, 可能导致模型过拟合, 并且其黑箱特性降低了物理可解释性, 这在精度要求高的测量

任务中是一个限制。因此, 尽管 BNN 在评估不确定性中表现强劲, 但其计算成本、先验依赖和复杂性等也对其应用造成了一定的限制。

### 3.3 集成学习方法

EL 方法是一种常用的估计模型不确定度的策略, 它通常通过独立训练多个神经网络模型, 并将这些模型的预测结果进行集成, 通过平均效应获得更为稳健的预测和不确定度估计<sup>[112-113]</sup>。每个网络的初始化权重和随机化过程通常是不同的, 这种多样性使得每个模型的预测结果可能会有所差异。EL 方法的结构如图 7 所示, 通过集成多个不同模型的输出, EL 能够有效地减小单一模型可能带来的预测偏差, 进而提高整体模型的泛化能力和鲁棒性, 结合不同模型的多样性来更好地应对不同数据分布和复杂任务, 从而提升模型的性能<sup>[128-129]</sup>。

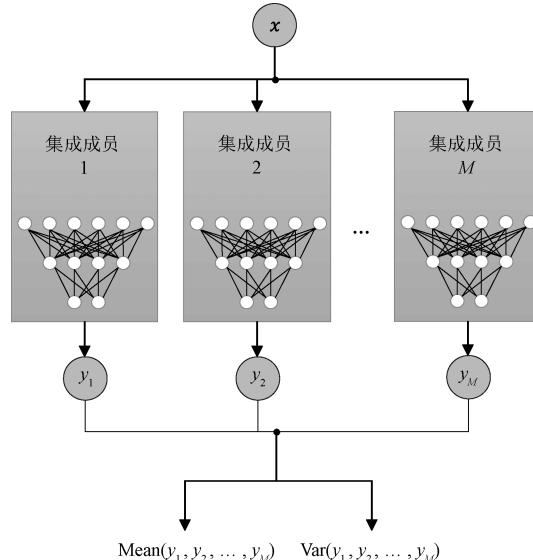


图 7 集成学习方法结构

Fig. 7 Structure of the ensemble learning method

在实践中, EL 方法常常通过在每个网络的末尾添加一个高斯层, 以预测高斯分布的均值和方差, 作为数据不确定度的量化指标。不同网络预测结果的差异则可作为模型不确定性的度量, 反映出模型对输入数据的依赖程度以及在面对不同输入时的稳定性。利用这些差异度量, EL 方法能够在给定输入数据的基础上, 提供更为全面的预测结果和不确定度评估, 从而帮助决策者在应用中做出更加可靠的决策<sup>[130]</sup>。

Chen 等<sup>[131]</sup>利用 EL 方法与长短时记忆网络相结合, 对压电惯性驱动系统的位移测量不确定度进行了评定; Hoffmann 等<sup>[132]</sup>利用集成学习方法针对光学形状测量中的逆问题进行了探讨, 通过系统地插入分布外误差和噪声数据来模拟不确定度影响, 探索了开发的不确定性量化的可靠性, 并将这种混合建模方法应用于倾斜波干涉

仪的测量中, 证明了 EL 方法估计不确定度的可靠性<sup>[133-134]</sup>; 对于深度学习方法存在的校准问题, Rahaman 等<sup>[135]</sup>提出了结合正则化等方法可以提高 EL 方法的预测准确性以及不确定度可靠性。

EL 方法在深度学习中因其能够有效提高模型泛化能力和不确定度估计而受到广泛关注。然而, 随着集成成员数量的增加, 集成方法所需的内存和计算工作量会呈线性增长, 这使得其在资源有限的环境中应用面临巨大挑战<sup>[101]</sup>。每增加一个成员模型, 不仅需要额外的计算资源来训练和评估, 还需要更多的内存来存储这些模型的参数和中间结果。此问题在处理大规模数据集和复杂网络结构时尤为突出, 如何在保证集成效果的同时, 降低内存占用和计算开销, 成为了当前以及未来研究的一个热点问题。

神经网络间接评定方法在复杂非线性和高维数据的测量不确定度评估中表现出显著优势。它能自动学习输入输出关系, 适应性强, 且能够量化测量结果的不确定性。结合贝叶斯理论或 Dropout 等技术, 可以增强不确定度评估的精确性。然而, 该方法依赖于高质量、大规模的数据, 且存在过拟合和计算开销大的问题。此外, 神经网络的“黑箱”特性降低了其可解释性。未来可通过引入更高效的训练算法和不确定度校准方法, 同时结合解释性人工智能技术提高模型可解释性以及不确定度可靠性, 扩大其在高精度测量中的应用<sup>[136-137]</sup>。

## 4 结 论

测量不确定度的评定是确保测量准确性和决策可靠性的主要环节。传统的统计方法, 如 GUM 和 MCM, 虽然在静态和线性系统中广泛应用, 但在处理复杂的非线性、高维和动态系统时逐渐显现局限性。近年来, 非统计方法的兴起为测量不确定度的评估提供了更多的方式, 包括贝叶斯推断、灰色评定法、模糊评定法、最大熵方法及基于神经网络的间接评定法等, 展现了其在各类复杂场景中的适用性和潜力。

特别是神经网络间接评定方法, 凭借其强大的非线性建模能力和适应性, 在高维和非线性场景中的表现尤为突出。然而, 深度学习方法对大规模数据的依赖、高昂的计算成本以及不确定度评估结果的可靠性, 仍是限制其进一步应用的主要挑战。未来, 结合高效的训练算法与可靠的不确定度校准方法, 将为神经网络在测量不确定度评估中的广泛应用提供更加坚实的基础。同时, 通过与传统方法的结合与优化, 进一步提升其在实时性、适应性和可靠性方面的能力, 从而满足现代工业和科学研究所日益复杂的测量需求。

## 参考文献

- [1] 费业泰. 误差理论与数据处理[M]. 北京:机械工业出版社, 2004.
- FEI Y T. Error theory and data processing[M]. Beijing: China Machine Press, 2004.
- [2] 陈晓怀, 谢少锋, 张勇斌, 等. 测量系统不确定度分析及其动态性研究[J]. 仪器仪表学报, 2002(S2) : 461-462.
- CHEN X H, XIE SH F, ZHANG Y B, et al. The analysis of uncertainty and research of dynamic character on measurement system[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2002(S2) : 461-462.
- [3] 王中宇, 陈晓怀, 吕京. 测量系统不确定度评定及其应用[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2019.
- WANG ZH Y, CHEN X H, LYU J. Uncertainty evaluation and application of measurement system [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2019.
- [4] 王中宇, 夏新涛, 朱坚民. 非统计原理及其工程应用[M]. 北京:科学出版社, 2005.
- WANG ZH Y, XIA X T, ZHU J M. Non-statistical principles and their engineering applications[M]. Beijing: Science Press, 2005.
- [5] Joint Committee for Guides in Metrology. Evaluation of measurement data-guide to the expression of uncertainty in measurement: JCGM 100—2008[S]. JCGM Member Organizations, First Edition, 2008.
- [6] BIPM. Evaluation of measurement data-supplement 1 to the 'guide to the expression of uncertainty in measurement'-Propagation of distributions using a Monte Carlo method: JCGM 101—2008[S]. JCGM Member Organizations, First Edition, 2008.
- [7] BIPM. Evaluation of measurement data-supplement 2 to the 'guide to the expression of uncertainty in measurement'-extension to any number of output quantities: JCGM 102—2011[S]. JCGM Member Organizations, First Edition, 2011.
- [8] KUSNANDAR N, FIRDAUS H, SUPONO I, et al. Bibliometric review of measurement uncertainty: Research classification and future tendencies [J]. Measurement, 2024, 232: 114636.
- [9] 李红莉, 陈志文, 张祖杨, 等. 接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定[J]. 电子测量与仪器学报, 2023, 37(12): 76-83.
- LI H L, CHEN ZH W, ZHANG Z Y, et al. Bayesian uncertainty evaluation based on accept-reject algorithm[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2023, 37(12): 76-83.
- [10] 胡红波, 孙桥, 杜磊. GUM S1 与基于贝叶斯方法的不确定度评估比较[J]. 计量学报, 2017, 38(4): 517-520.
- HU H B, SUN Q, DU L. Comparison of GUM S1 and Bayesian method based uncertainty evaluation[J]. Acta Metrologica Sinica, 2017, 38(4): 517-520.
- [11] 朱坚民, 宾鸿赞, 王中宇, 等. 测量结果标准不确定度的灰色评定方法[J]. 华中理工大学学报, 2000(9): 84-86.
- ZHU J M, BIN H Z, WANG ZH Y, et al. A grey evaluation method of measurement result with standard uncertainty[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 2000(9): 84-86.
- [12] SONG ZH G, WANG X R, HUANG W, et al. Real-time traffic condition uncertainty quantification using adaptive grey prediction interval model[J]. Transportmetrica A: Transport Science, 2024; 1-26.
- [13] 谌贝, 龚鹏伟, 谢文, 等. 最大熵原理在测量不确定度评定中的应用[J]. 宇航计测技术, 2016, 36(5): 15-18.
- CHEN B, GONG P W, XIE W, et al. The maximum entropy applied in the evaluation of the measurement Uncertainty [J]. Journal of Astronautic Metrology and Measurement, 2016, 36(5): 15-18.
- [14] 刘智敏. 扩展最大熵原理及其在不确定度中的应用[J]. 中国计量学院学报, 2010, 21(1): 1-5, 25.
- LIU ZH M. Principle of expansion maximum entropy and its application in uncertainty[J]. Journal of China Jiliang University, 2010, 21(1): 1-5, 25.
- [15] MAURIS G, LASSEUR V, FOULLOY L. A fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement[J]. Measurement, 2001, 29(3): 165-177.
- [16] TANG H H, AHMAD N S. Fuzzy logic approach for controlling uncertain and nonlinear systems: A comprehensive review of applications and advances[J]. Systems Science & Control Engineering, 2024, 12(1): 2394429.
- [17] 陶猛, 任思源, 劳娟娟. 常用测量不确定度评定方法概述与比较[J]. 计量科学与技术, 2024, 68(6): 40-48.
- TAO M, REN S Y, LAO CH J. Overview and comparison of common measurement uncertainty evaluation methods [J]. Metrology Science and Technology, 2024, 68(6): 40-48.
- [18] DA SILVA HACK P, SCHWENGBER TEN CATEN C.

- Measurement uncertainty: Literature review and research trends [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2012, 61(8):2116-2124.
- [19] CAPRIGLIONE D, CARISSIMO C, MILANO F, et al. Measurement and applications: Artificial intelligence in the field of measurement applications [J]. IEEE Instrumentation & Measurement Magazine, 2024, 27(4):29-36.
- [20] SHIRMOHAMMADI S. Measurement methodology [J]. IEEE Instrumentation & Measurement Magazine, 2023, 26(7):20-27.
- [21] 靳浩元, 刘军. 测量不确定度的评定方法及应用研究 [J]. 计量科学与技术, 2021, 65(5):124-131.  
JIN H Y, LIU J. The evaluation method and application research of measurement uncertainty [J]. Metrology Science and Technology, 2021, 65(5):124-131.
- [22] 江文松, 李旋, 罗哉, 等. 六自由度机械臂参数校准不确定度评定方法 [J]. 仪器仪表学报, 2022, 43(7):26-34.  
JIANG W S, LI X, LUO Z, et al. Uncertainty evaluation of calibration model of six DOF robot arm [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2022, 43(7):26-34.
- [23] 王伟, 宋明顺, 陈意华, 等. 蒙特卡罗方法在复杂模型测量不确定度评定中的应用 [J]. 仪器仪表学报, 2008(7):1446-1449.  
WANG W, SONG M SH, CHEN Y H, et al. Application of Monte-Carlo method in measurement uncertainty evaluation of complicated model [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2008(7):1446-1449.
- [24] 凌明祥, 李会敏, 黎启胜, 等. 含相关性的测量不确定度拟蒙特卡罗评定方法 [J]. 仪器仪表学报, 2014, 35(6):1385-1393.  
LING M X, LI H M, LI Q SH, et al. Quasi Monte Carlo method for the measurement uncertainty evaluation considering correlation [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2014, 35(6):1385-1393.
- [25] PTAK M, CZMOCHOWSKI J. Using computer techniques for vibration damage estimation under stochastic loading using the Monte Carlo method for aerospace applications [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2023, 72:103452.
- [26] XU SH R, ZHANG Q, WANG D X, et al. Uncertainty quantification of compressor map using the Monte Carlo approach accelerated by an adjoint-based nonlinear method [J]. Aerospace, 2023, 10(3):280.
- [27] DA SILVA J H B, CORTEZ P C, JAGATHEE-SAPERUMAL S K, et al. ECG measurement uncertainty based on Monte Carlo approach: An effective analysis for a successful cardiac health monitoring system [J]. Bioengineering, 2023, 10(1):115.
- [28] GABRIÉ M, ROTSKOFF G R, VANDEN-EIJNDEN E. Adaptive Monte Carlo augmented with normalizing flows [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2022, 119(10):2109420119.
- [29] TAVERNIERS S, TARTAKOVSKY D M. Estimation of distributions via multilevel Monte Carlo with stratified sampling [J]. Journal of Computational Physics, 2020, 419:109572.
- [30] 叶苗. 基于准蒙特卡罗算法的测透镜焦距数据误差分析 [J]. 激光与光电子学进展, 2014, 51(6):92-97.  
YE M. Error analysis of focal length of lens based on Quasi-Monte Carlo algorithm evaluation [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2014, 51(6):92-97.
- [31] 胡红波, 刘爱东, 左爱斌, 等. 加速度计校准的贝叶斯不确定度评估 [J]. 计量科学与技术, 2021, 65(5):101-107, 61.  
HU H B, LIU AI D, ZUO AI B, et al. Bayesian uncertainty evaluation for accelerometer calibration [J]. Metrology Science and Technology, 2021, 65(5):101-107, 61.
- [32] 周翔, 姜婷婷, 徐丹, 等. 基于 Logistic 回归建模和马尔可夫链蒙特卡罗方法计算后验描述丁酸梭菌株对于给定辐照剂量区的应答趋势 [J]. 原子核物理评论, 2016, 33(4):500-505.  
ZHOU X, JIANG T T, XU D, et al. Combining Logistic regression and markov chain Monte-Carlo describe the relationship between exposure to a given dose of radiation and its effect on clostridium tyrobutyricum strains [J]. Nuclear Physics Review, 2016, 33(4):500-505.
- [33] VAN DER VEEN A M H. Bayesian methods for type A evaluation of standard uncertainty [J]. Metrologia, 2018, 55(5):670-684.
- [34] KYRIAZIS G A. Comparison of GUM supplement 1 and Bayesian analysis using a simple linear calibration model [J]. Metrologia, 2008, 45(2):L9-L11.
- [35] 程银宝. 现代不确定度理论及应用研究 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2017.  
CHENG Y B. Modern uncertainty theory and its application [D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2017.

- [36] KRUSCHKE J K. Bayesian data analysis [J]. Wiley Interdisciplinary Reviews: Cognitive Science, 2010, 1(5):658-676.
- [37] 李勇. 基于先验的贝叶斯先验选择方法[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2006(6):548-550.
- LI Y. On Bayesian prior selection method based on prior[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Sciences Edition), 2006(6): 548-550.
- [38] MARSCHALL M, DEMEYER S, PETIT S, et al. Utilizing prior knowledge about the measurement process for uncertainty evaluation through plain Monte Carlo sampling [J]. International Journal of Metrology and Quality Engineering, 2024, 15:2024010.
- [39] 刘昊邦,陈童,胡涛,等. 基于多批次增长试验的舰空导弹命中概率贝叶斯估计[J]. 系统工程与电子技术,2025,47(3):871-882.
- LIU H B, CHEN T, HU T, et al. Bayesian estimation of ship-to-air missile hit probability based on multiple batches growth tests [J]. Systems Engineering and Electronics, 2025,47(3):871-882.
- [40] 王军,闫锋刚,马文洁,等. 基于 Laplace 先验的 Bayes 压缩感知波达方向估计[J]. 电子与信息学报,2015, 37(4):817-823.
- WANG J, YAN F G, MA W J, et al. Direction-of-arrival estimation using laplace prior based on Bayes compressive sensing [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2015,37(4):817-823.
- [41] EFENDI A, EFFRIHAN. A simulation study on Bayesian Ridge regression models for several collinearity levels[C]. International Conference and Workshop on Mathematical Analysis and its Application, 2017: 020031.
- [42] CONSONNI G, FOUSKAKIS D, LISEO B, et al. Prior distributions for objective Bayesian analysis[J]. Bayesian Analysis, 2018, 13(2): 627-679.
- [43] 徐永智. 基于贝叶斯方法与稳健理论的滚动轴承摩擦力矩不确定度建立方法[J]. 航空动力学报,2022, 37(5):1000-1009.
- XU Y ZH. Uncertainties establishment method of friction moment on rolling bearing based on Bayesian theory and robust theory [J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(5):1000-1009.
- [44] RAY K. Bayesian inverse problems with non-conjugate priors[J]. Electronic Journal of Statistics, 2013, 7: 2516-2549.
- [45] LY A, VERHAGEN J, WAGENMAKERS E J. Harold Jeffreys's default Bayes factor hypothesis tests: Explanation, extension, and application in psychology [J]. Journal of Mathematical Psychology, 2016, 72:19-32.
- [46] 殷泽凯,郭宇. 基于 Jeffreys 先验的参数相关退化可靠性评估[J]. 机械强度,2024,46(1):249-254.
- YIN Z K, GUO Y. Dependent parameters degradation reliability assessment based on Jeffreys noninformative prior parameters [J]. Journal of Mechanical Strength, 2024,46(1):249-254.
- [47] 杨磊,毛欣瑶,杨晓炜,等. 基于非监督贝叶斯学习雷达性能指标动态评估[J]. Systems Engineering & Electronics, 2021,43(1): 74-82.
- YANG L, MAO X Y, YANG X W, et al. Dynamic evaluation of radar performance index based on unsupervised Bayesian learning [J]. Systems Engineering & Electronics, 2021,43(1): 74-82.
- [48] 刘竟飞. 基于贝叶斯深度学习的高维不确定性传播方法研究[D]. 长沙:湖南大学,2021.
- LIU J F. Study of uncertainty propagation method via Bayesian deep learning for high dimensional problems[D]. Changsha: Hunan University, 2021.
- [49] MORICONI R, DEISENROTH M P, SESH KUMAR K S. High-dimensional Bayesian optimization using low-dimensional feature spaces [J]. Machine Learning, 2020, 109(9/10):1925-1943.
- [50] BINOIS M, WYCOFF N. A survey on high-dimensional Gaussian process modeling with application to Bayesian optimization [J]. ACM Transactions on Evolutionary Learning and Optimization, 2022, 2(2):3545611.
- [51] KARIMI M, DAYAL K, POZZI M. Hessian-informed Hamiltonian Monte Carlo for high-dimensional problems[J]. ArXiv preprint arXiv:2305.01576, 2023.
- [52] GROSNIK A, TUTUNOV R, MARAVAL A M, et al. High-dimensional Bayesian optimisation with variational autoencoders and deep metric learning [J]. ArXiv preprint arXiv:2106.03609, 2021.
- [53] 邓聚龙. 灰色系统理论与计量未来学[J]. 未来与发展, 1983(3):20-23.
- DENG J L. Grey system theory and econometric futurology[J]. Future and Development, 1983 (3):20-23.
- [54] 王中宇,朱坚民,夏新涛. 几种测量不确定度的非统计评定方法[J]. 计量技术, 2001(4):48-50.
- WANG ZH Y, ZHU J M, XIA X T. Several non-statistical evaluation methods of measurement uncertainty [J]. Metrology Science and Technology, 2001(4):48-50.

- [55] XIA X T, CHEN X Y, ZHANG Y ZH, et al. Grey bootstrap method of evaluation of uncertainty in dynamic measurement [J]. Measurement, 2008, 41(6): 687-696.
- [56] 赵远方. 基于灰色理论的全站仪测距不确定度评定[J]. 工业计量, 2022, 32(4): 45-47.  
ZHAO Y F. Uncertainty evaluation of total station ranging based on grey theory [J]. Industrial Metrology, 2022, 32(4): 45-47.
- [57] 朱彦龙, 程银宝, 高宏堂, 等. 极小样本数据的不确定度改进灰色评定方法[J]. 计量学报, 2023, 44(12): 1932-1938.  
ZHU Y L, CHENG Y B, GAO H T, et al. Improved grey evaluation method for uncertainty of minimum sample data [J]. Acta Metrologica Sinica, 2023, 44(12): 1932-1938.
- [58] CHENG Y B, ZHU Y L, GAO H T, et al. Small sample uncertainty evaluation of industrial robot position accuracy measurement based on grey model [J]. Measurement Science and Technology, 2024, 35(8): 086006.
- [59] 刘寒冰, 向一鸣, 阮有兴. 背景值优化的多变量灰色模型在路基沉降预测中的应用[J]. 岩土力学, 2013, 34(1): 173-181.  
LIU H B, XIANG Y M, RUAN Y X. Multivariable grey model based on background value optimization and its application to subgrade settlement prediction [J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(1): 173-181.
- [60] 熊远南. 基于改进灰色-多元回归组合预测模型的燃煤电厂智慧水务研究[J]. 化工进展, 2020, 39(S2): 393-400.  
XIONG Y N. Smart water affair of coal-fired power plant based on improved combination prediction model of grey system and regression analysis [J]. Chemical Industry and Engineering Progress, 2020, 39(S2): 393-400.
- [61] 王中宇, 葛乐矣, 杨文平, 等. 一种小样本虚拟仪器测量不确定度评定新方法[J]. 计量学报, 2008(4): 387-392.  
WANG ZH Y, GE L Y, YANG W P, et al. A novel measurement uncertainty evaluation method for small sample virtual instrument [J]. Acta Metrologica Sinica, 2008(4): 387-392.
- [62] HE G, AHMAD K M, YU W X, et al. A comparative analysis of machine learning and grey models[J]. ArXiv preprint arXiv:2104.00871, 2021.
- [63] WANG Y ZH, PAN CH SH, GAO F F, et al. Reinforcement learning empowered grey system theory: Advancing intelligence in traffic prediction for wireless sensor networks [J]. IEEE Sensors Journal, 2024, 24(14): 22023-22036.
- [64] ZHANG F X, XIAO X P, GAO M Y. An extended neural ordinary differential equation network with grey system and its applications [J]. Neurocomputing, 2024, 576: 127343.
- [65] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [66] 王英, 杨曙年. 基于模糊集合理论评定 ICP 测量不确定度的研究[J]. 计量技术, 2014(11): 71-74.  
WANG Y, YANG SH N. Research on evaluating ICP measurement uncertainty based on fuzzy set theory [J]. Metrology Science and Technology, 2014(11): 71-74.
- [67] COX M, HARRIS P. An outline of supplement 1 to the guide to the expression of uncertainty in measurement on numerical methods for the propagation of distributions [J]. Measurement Techniques, 2005, 48(4): 336-345.
- [68] FERRERO A, SALICONE S. The random-fuzzy variables: A new approach for the expression of uncertainty in measurement [C]. 20th IEEE Instrumentation Technology Conference, 2003: 1502-1507.
- [69] MAURIS G. Expression of measurement uncertainty in a very limited knowledge context: A possibility theory-based approach [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2007, 56(3): 731-735.
- [70] ZHU Q, JIANG ZH D, ZHAO Z X, et al. Uncertainty estimation in measurement of micromechanical properties using random-fuzzy variables [J]. Review of Scientific Instruments, 2006, 77(3): 35107.
- [71] SALICONE S, TINARELLI R. An experimental comparison in the uncertainty estimation affecting wavelet-based signal analysis by means of the IEC-ISO guide and the random-fuzzy approaches [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2006, 55(3): 691-699.
- [72] FERRERO A, SALICONE S. The RFV method applied to uncertainty estimation: A case study [C]. 2007 IEEE Instrumentation & Measurement Technology Conference, 2007: 549-554.
- [73] FERRERO A, SALICONE S. The construction of random-fuzzy variables from the available relevant metrological information [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2008, 58(2): 365-374.

- [74] 蒋薇, 张玘, ALESSANDRO FERRERO, 等. 随机模糊变量表示测量及测量不确定度[J]. 仪器仪表学报, 2016, 37(5): 1065-1078.
- JIANG W, ZHANG X, FERRERO A, et al. Measurements and measurement uncertainty expressed in terms of random-fuzzy variables[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2016, 37(5): 1065-1078.
- [75] 吕晓娟, 黄美发, 孙永厚. 基于模糊集合理论的不确定度评定[J]. 机械设计与制造, 2008(9): 34-36.
- LYU X J, HUANG M F, SUN Y H. The uncertainty estimation based on fuzzy interval theory[J]. Machinery Design & Manufacture, 2008(9): 34-36.
- [76] YILMAZ B M, TATLICIOGLU E, SELIM E. Velocity observer design for a class of uncertain nonlinear mechanical systems: A self-adaptive fuzzy logic-based approach[J]. International Journal of Systems Science, 2025, 56(1/4): 423-433.
- [77] TALPUR N, ABDULKADIR S J, ALHUSSIAN H, et al. A comprehensive review of deep neuro-fuzzy system architectures and their optimization methods[J]. Neural Computing and Applications, 2022, 34(3): 1837-1875.
- [78] VARSHNEY A K, TORRA V. Literature review of the recent trends and applications in various fuzzy rule-based systems [J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2023, 25(6): 2163-2186.
- [79] 廖瑞金, 王谦, 骆思佳, 等. 基于模糊综合评判的电力变压器运行状态评估模型[J]. 电力系统自动化, 2008, 32(3): 70-75.
- LIAO R J, WANG Q, LUO S J, et al. Condition assessment model for power transformer in service based on fuzzy synthetic evaluation[J]. Automation of Electric Power Systems, 2008, 32(3): 70-75.
- [80] ZHENG Y H, XU Z SH, WANG X X. The fusion of deep learning and fuzzy systems: A state-of-the-art survey[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 30(8): 2783-2799.
- [81] WANG H, XU Z SH, PEDRYCZ W. An overview on the roles of fuzzy set techniques in big data processing: Trends, challenges and opportunities [J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 118: 15-30.
- [82] JAYNES E T. Information theory and statistical mechanics[J]. Physical Review, 1957, 106(4): 620.
- [83] 周兆经. 估算测量不确定度的一种最大熵原理[J]. 计量技术, 1989(4): 1-2, 27.
- ZHOU ZH J. A principle of maximum entropy for estimating measurement uncertainty[J]. Metrology Science and Technology, 1989(4): 1-2, 27.
- [84] SHANNON C E. A mathematical theory of communication [J]. The Bell System Technical Journal, 1948, 27(3): 379-423.
- [85] IUCULANO G, NIELSEN L, ZANOBINI A, et al. The principle of maximum entropy applied in the evaluation of the measurement uncertainty[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2007, 56 (3): 717-722.
- [86] 钟浩, 张为民, 谢树联, 等. 基于数据归一化原点矩约束最大熵原理的小样本数据测量不确定度评定[J]. 机械制造, 2024, 62(4): 77-81.
- ZHONG H, ZHANG W M, XIE SH L, et al. Measurement uncertainty evaluation of small batch data based on maximum entropy principle constrained by data normalized origin moment[J]. Machinery, 2024, 62(4): 77-81.
- [87] TSALLIS C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics[J]. Journal of Statistical Physics, 1988, 52: 479-487.
- [88] DENG Y. Uncertainty measure in evidence theory [J]. Science China Information Sciences, 2020, 63 (11): 210201.
- [89] JIZBA P, LAMBIASE G, LUCIANO G G, et al. Decoherence limit of quantum systems obeying generalized uncertainty principle: New paradigm for Tsallis thermostatistics[J]. Physical Review D, 2022, 105 (12): L121501.
- [90] GAO Q Y, WEN T, DENG Y. Information volume fractal dimension[J]. Fractals, 2021, 29(8): 2150263.
- [91] DENG J X, DENG Y. Maximum entropy of random permutation set[J]. Soft Computing, 2022, 26 (21): 11265-11275.
- [92] WANG Y Q, ZHOU W H, DONG D F, et al. Estimation of random vibration signals with small samples using bootstrap maximum entropy method [J]. Measurement, 2017, 105: 45-55.
- [93] WANG D, LIU K B, ZHANG X. A generic indirect deep learning approach for multisensor degradation modeling[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2021, 19(3): 1924-1940.
- [94] ZHANG X J, DING Y J, ZHANG T L, et al. Application and exploration of artificial intelligence technology in the field of measurement[C]. 2nd International Conference on Artificial Intelligence, 2022:

- 1-8.
- [95] SHIRMOHAMMADI S, AL OSMAN H. Machine learning in measurement part 1: Error contribution and terminology confusion[J]. IEEE Instrumentation & Measurement Magazine, 2021, 24(2): 84-92.
- [96] 崔伟群,田锋,王亭亭,等. 测量不确定度的深度学习评定方法[J]. 中国计量, 2021(7): 99-101.
- CUI W Q, TIAN F, WANG T T, et al. Deep learning evaluation method for measurement uncertainty [J]. China Metrology, 2021(7): 99-101.
- [97] ABDAR M, POURPANAH F, HUSSAIN S, et al. A review of uncertainty quantification in deep learning: Techniques, applications and challenges[J]. Information Fusion, 2021, 76: 243-297.
- [98] 周红标,张钰,柏小颖,等. 基于自适应模糊神经网络的非线性系统模型预测控制[J]. 化工学报, 2020, 71(7): 3201-3212.
- ZHOU H B, ZHANG Y, BAI X Y, et al. Model predictive control of nonlinear system based on adaptive fuzzy neural network[J]. CIESC Journal, 2020, 71(7): 3201-3212.
- [99] TANG Y, KURTHS J, LIN W, et al. Introduction to focus issue: When machine learning meets complex systems: Networks, chaos, and nonlinear dynamics[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2020, 30(6): 063151.
- [100] 白杰,胡红波. 计量中回归模型参数值及其不确定度评估[J]. 计量学报, 2022, 43(12): 1683-1688.
- BAI J, HU H B. Estimates and its corresponding uncertainty evaluation of parameters for regression model in metrology[J]. Acta Metrologica Sinica, 2022, 43(12): 1683-1688.
- [101] GAWLIKOWSKI J, TASSI C R N, ALI M, et al. A survey of uncertainty in deep neural networks [J]. Artificial Intelligence Review, 2023, 56(Suppl 1): 1513-1589.
- [102] ALQARAFI A, BATTOOL H, ABBAS T, et al. Estimating uncertainty in deep learning methods and applications[C]. 2024 International Conference on Computer and Applications, 2024: 1-6.
- [103] 陈东昱,陈华,范丽敏,等. 基于深度学习的随机性检验策略研究[J]. 通信学报, 2023, 44(6): 23-33.
- CHEN D Y, CHEN H, FAN L M, et al. Research on test strategy for randomness based on deep learning[J]. Journal on Communications, 2023, 44(6): 23-33.
- [104] 雷亚国,贾峰,周昕,等. 基于深度学习理论的机械装备大数据健康监测方法[J]. 机械工程学报, 2015, 51(21): 49-56.
- LEI Y G, JIA F, ZHOU X, et al. A deep learning-based method for machinery health monitoring with big data[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(21): 49-56.
- [105] PFOSER D, JENSEN C S. Capturing the uncertainty of moving-object representations [C]. International Symposium on Spatial Databases. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1999: 111-131.
- [106] CHENG R, EMRICH T, KRIESEL H P, et al. Managing uncertainty in spatial and spatio-temporal data[C]. 2014 IEEE 30th International Conference on Data Engineering, 2014: 1302-1305.
- [107] HE W CH, JIANG ZH, XIAO T S, et al. A survey on uncertainty quantification methods for deep learning[J]. ArXiv preprint arXiv: 2302.13425, 2023.
- [108] GAL Y, GHAHRAMANI Z. Bayesian convolutional neural networks with Bernoulli approximate variational inference[J]. ArXiv preprint arXiv: 1506.02158, 2015.
- [109] THELEN A, ZHANG X G, FINK O, et al. A comprehensive review of digital twin—part 2: Roles of uncertainty quantification and optimization, a battery digital twin, and perspectives[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2023, 66(1): 1.
- [110] 李明轩,韩宏伟,刘浩杰,等. 基于数据分布域变换与贝叶斯神经网络的渗透率预测及不确定性估计[J]. 地球物理学报, 2023, 66(4): 1664-1680.
- LI M X, HAN H W, LIU H J, et al. Permeability prediction and uncertainty quantification base on Bayesian neural network and data distribution domain transformation [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2023, 66(4): 1664-1680.
- [111] LI J B, MIAO Z CH, QIU Q, et al. Training Bayesian neural networks with sparse subspace variational inference[J]. ArXiv preprint arXiv: 2402.11025, 2024.
- [112] SAGI O, ROKACH L. Ensemble learning: A survey[J]. Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery, 2018, 8(4): 1249.
- [113] YANG Y Q, LYU H J, CHEN N. A survey on ensemble learning under the era of deep learning [J]. Artificial Intelligence Review, 2023, 56(6): 5545-5589.
- [114] MUKHOTI J, KIRSCH A, VAN AMERSFOORT J, et al. Deterministic neural networks with inductive biases capture epistemic and aleatoric uncertainty [J]. ArXiv preprint arXiv: 2102.11582, 2021.

- [115] VAN AMERSFOORT J, SMITH L, TEH Y W, et al. Uncertainty estimation using a single deep deterministic neural network [C]. International Conference on Machine Learning, 2020: 9690-9700.
- [116] KOTELEVSKII N, ARTEMENKOV A, FEDYANIN K, et al. Nonparametric uncertainty quantification for single deterministic neural network [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2022, 35: 36308-36323.
- [117] MUKHOTI J, KIRSCH A, VAN AMERSFOORT J, et al. Deep deterministic uncertainty: A new simple baseline [C]. 2023 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2023: 24384-24394.
- [118] AMINI A, SCHWARTING W, SOLEIMANY A, et al. Deep evidential regression [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2020, 33: 14927-14937.
- [119] KANAZAWA T, GUPTA C. Sample-based uncertainty quantification with a single deterministic neural network [J]. ArXiv preprint arXiv: 2209.08418, 2022.
- [120] LIU J Z, PADHY S, REN J, et al. A simple approach to improve single-model deep uncertainty via distance-awareness [J]. Journal of Machine Learning Research, 2023, 24(42): 1-63.
- [121] ZHANG P, YIN ZH Y, JIN Y F. Bayesian neural network-based uncertainty modelling: Application to soil compressibility and undrained shear strength prediction [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2022, 59(4): 546-557.
- [122] SCHODT D J. Few-sample variational inference of Bayesian neural networks with arbitrary nonlinearities [J]. ArXiv preprint arXiv: 2405.02063, 2024.
- [123] IZZATULLAH M, YILDIRIM I E, WAHEED U B, et al. Laplace HypoPINN: Physics-informed neural network for hypocenter localization and its predictive uncertainty [J]. Machine Learning: Science and Technology, 2022, 3(4): 045001.
- [124] GAL Y, GHAHRAMANI Z. Dropout as a Bayesian approximation: Representing model uncertainty in deep learning [C]. International Conference on Machine Learning, 2016: 1050-1059.
- [125] GAL Y, HRON J, KENDALL A. Concrete dropout [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2017, 30.
- [126] 朱挺, 陈兆祥, 周笛, 等. 基于 Bayesian-LSTM 神经网络的热轧轧辊剩余寿命预测及不确定性评估 [J]. 机械工程学报, 2024, 60(11): 181-190.
- [127] ZHU T, CHEN ZH X, ZHOU D, et al. Bayesian-LSTM neural network-based remaining useful life prediction and uncertainty estimation of rollers in a hot strip mill [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(11): 181-190.
- [128] FENG SH J, ZUO CH, HU Y, et al. Deep-learning-based fringe-pattern analysis with uncertainty estimation [J]. Optica, 2021, 8(12): 1507-1510.
- [129] LAKSHMINARAYANAN B, PRITZEL A, BLUNDELL C. Simple and scalable predictive uncertainty estimation using deep ensembles [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, ArXiv preprint arXiv: 1612.01474, 2017.
- [130] DONG X B, YU ZH W, CAO W M, et al. A survey on ensemble learning [J]. Frontiers of Computer Science, 2020, 14(2): 241-258.
- [131] MOHAMMED A, KORA R. A comprehensive review on ensemble deep learning: Opportunities and challenges [J]. Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences, 2023, 35(2): 757-774.
- [132] CHEN W H, XIA H J, SONG R CH, et al. Dynamic modeling and performance evaluation of piezoelectric impact drive system based on neural network [J]. Measurement Science and Technology, 2023, 34(10): 105021.
- [133] HOFFMANN L, FORTMEIER I, ELSTER C. Uncertainty quantification by ensemble learning for computational optical form measurements [J]. Machine Learning: Science and Technology, 2021, 2(3): 035030.
- [134] HOFFMANN L, FORTMEIER I, ELSTER C. Deep learning for tilted-wave interferometry [J]. tm-Technisches Messen, 2022, 89(1): 33-42.
- [135] HARREN L. Investigating deep ensembles for the tilted-wave interferometer [M]. Technische Universitaet Berlin (Germany), 2022.
- [136] RAHAMAN R, THIERY A H. Uncertainty quantification and deep ensembles [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2021, 34: 20063-20075.
- [137] ARRIETA A, DÍAZ-RODRÍGUEZ N, DEL SER J, et al. Explainable artificial intelligence (XAI): Concepts, taxonomies, opportunities and challenges toward responsible AI [J]. Information Fusion, 2020, 58: 82-115.
- [138] CHIABURU T, HAUBER F, BIEßMANN F. Uncertainty

in XAI: Human perception and modeling approaches[J]. Machine Learning and Knowledge Extraction, 2024, 6(2):1170-1192.

## 作者简介



**陈文浩**,2021 年于安徽大学获得学士学位,现于中国合肥工业大学攻读博士学位,主要研究方向为基于神经网络的动态系统测量不确定性评估和动态测量系统神经网络建模的研究。

E-mail:2021170036@mail.hfut.edu.cn

**Chen Wenhao** received his B. Sc. degree from Anhui University in 2021. He is currently pursuing his Ph. D. degree at Hefei University of Technology. His main research interests include neural network-based measurement uncertainty evaluation of dynamic systems and neural network modeling of dynamic measurement systems.



**丁垠冶**,2019 年于安徽师范大学获得学士学位,现于中国合肥工业大学攻读博士学位,主要研究方向为测量不确定度评定的理论研究和小样本测量数据分析。

E-mail:2020111434@mail.hfut.edu.cn

**Ding Yinye** received her B. Sc. degree from Anhui Normal University in 2019. She is currently pursuing her Ph. D. degree at Hefei University of Technology. Her main research interests include the theoretical study of measurement uncertainty evaluation and the analysis of small-sample measurement data.



**宋仁成**,2005 年于吉林大学获得学士学位,2010 年于浙江大学获得博士学位。现为中国科学院声学研究所研究员。主要研究方向包括以人为主的智能感知和自然人机交互。

E-mail:rcsong@hfut.edu.cn

**Song Rencheng** received his B. Sc. degree from Jilin

University in 2005, and his Ph. D. degree from Zhejiang University in 2010. He is currently a professor at the School of Instrument Science and Opto-electronic Engineering, Hefei University of Technology. His main research interests include human-centered intelligent perception and natural human-computer interaction.



**张进**,2001 年于合肥工业大学获学士学位,2010 年于天津大学博士学位。现为中国科学院声学研究所研究员。主要研究方向为视觉检测及动态测试。

E-mail:zhangjin@hfut.edu.cn

**Zhang Jin** received his B. Sc. degree from Hefei University of Technology in 2001, and his Ph. D. degree from Tianjin University in 2010. He is currently a professor at the School of Instrument Science and Opto-electronic Engineering, Hefei University of Technology. His main research interests include visual inspection and dynamic testing.



**夏豪杰**(通信作者),2001 年于合肥工业大学获学士学位,2004 年于合肥工业大学获硕士学位,2006 年获合肥工业大学博士学位。现为中国科学院声学研究所研究员。现主要从事光电精密测量技术、微/纳米测控系统、仪器精度理论、精密仪器设计等领域的研究工作。

E-mail:hjxiao@hfut.edu.cn

**Xia Haojie** (Corresponding author) received his B. Sc., M. Sc., and Ph. D. degrees all from Hefei University of Technology in 2001, 2004 and 2006, respectively. He is currently a professor at the School of Instrument Science and Opto-electronic Engineering, Hefei University of Technology. His main research interests include optoelectronic precision measurement technology, micro/nano measurement and control system, instrument accuracy theory, precision instrument design and other fields.