

DOI: 10.19650/j.cnki.cjsi.J2514099

# 冷原子喷泉钟频率锁定的仿真与改进<sup>\*</sup>

李 悦<sup>1</sup>, 刘 昆<sup>2,3</sup>, 慈 骋<sup>1</sup>, 薛振宇<sup>1</sup>, 房 芳<sup>2,3</sup>

(1. 中国计量大学信息工程学院 杭州 310018; 2. 中国计量科学研究院时间频率计量科学研究所 北京 100029;  
3. 中国计量科学研究院国家市场监管重点实验室 北京 100029)

**摘 要:**冷原子喷泉钟的频率锁定是将外部馈入的微波的中心频率与原子跃迁频率锁定来获取准确的频率值。传统方法是将探测得到的频率误差信号经过传统的数字 PID 方法计算得到频率调整量,以调整馈入微波的中心频率值。为了便于优化冷原子喷泉钟的锁定过程,基于 Python 程序构建了喷泉钟频率锁定过程的仿真模型,并利用实验数据确定了仿真过程中的两个参数,一个参数是冷原子喷泉钟在锁定过程中附加的附加频率高斯白噪声的标准差为  $\sigma/\sqrt{\tau} = 1.35 \times 10^{-13}$  ( $\tau = 2.4$  s),另一个参数是喷泉钟测量得到的跃迁几率差值与频率误差值之间的比例系数  $C = 2.8$ 。在建立的仿真模型的基础上,为了实现 PID 控制参数的动态调整,提升系统的鲁棒性和抗干扰能力,在冷原子喷泉钟频率锁定过程中引入模糊 PID 控制方法。首先使用仿真程序优化并选定了相关实验参数,之后进行了这些参数下的传统 PID 和模糊 PID 的短时间的实验测量。仿真与实验结果表明,模糊 PID 在短期稳定度方面优于传统 PID,Allan 方差分析显示其短期稳定度提升约 14.2%,实验结果与仿真结果的符合程度验证了该仿真模型的有效性。另外,单独的仿真结果也显示,模糊 PID 对突发性频率跳变( $\pm 1 \times 10^{-11}$ )具有一定的抑制能力;在系统性频率阶跃( $\pm 5 \times 10^{-12}$ )下响应速度与传统 PID 相当。

**关键词:** 喷泉钟;频率锁定;仿真模型;模糊 PID

**中图分类号:** TH714 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 410.55

## Simulation and improvement of frequency locking for cold atomic fountain clock

Li Yue<sup>1</sup>, Liu Kun<sup>2,3</sup>, Ci Cheng<sup>1</sup>, Xue Zhenyu<sup>1</sup>, Fang Fang<sup>2,3</sup>

(1. School of Information Engineering, China Jiliang University College of Automation, Hangzhou 310018, China;

2. Institute of Time and Frequency Measurement, National Institute of Metrology of China, Beijing 100029, China;

3. Key Laboratory of State Administration for Market Regulation, National Institute of Metrology of China, Beijing 100029, China)

**Abstract:** The frequency locking of a cold atom fountain clock is achieved by synchronizing the center frequency of an externally injected microwave signal with the atomic transition frequency, thereby obtaining a highly accurate frequency reference. In conventional systems, the detected frequency error signal is processed by a digital PID controller to generate a correction term that adjusts the microwave center frequency accordingly. To facilitate optimization of the fountain clock locking process, a simulation model of the frequency locking loop is developed using Python. Two key parameters of the model are determined from experimental data. The standard deviation of the additional Gaussian white frequency noise during locking is  $\sigma/\sqrt{\tau} = 1.35 \times 10^{-13}$  (for  $\tau = 2.4$  s), and the proportional coefficient between the measured transition probability difference and the frequency error is  $C = 2.8$ . Based on this model, a fuzzy PID control scheme is introduced into the frequency locking loop to enable dynamic tuning of the PID parameters, thereby enhancing system robustness and disturbance rejection capability. The simulation framework is first employed to optimize and select relevant experimental parameters, followed by short-term experimental measurements under both conventional PID and fuzzy PID control conditions. Both simulation and experimental results show that the fuzzy PID controller provides superior short-term frequency stability compared to the traditional PID method. Allan variance analysis indicates an improvement of approximately 14.2% in short-term stability, and the strong agreement between simulation and experimental results confirms the validity of the developed simulation model. Furthermore,

收稿日期: 2025-05-30 Received Date: 2025-05-30

<sup>\*</sup> 基金项目: 中国计量科学研究院基本科研业务费项目 (AKYZZ2402)、中国计量科学研究院质量技术基础能力建设项目 (ANL2405) 资助

independent simulations show that the fuzzy PID controller exhibits effective suppression of sudden frequency jumps ( $\pm 1 \times 10^{-11}$ ) while maintaining a comparable response speed to the conventional PID under systematic frequency steps ( $\pm 5 \times 10^{-12}$ ).

**Keywords:** fountain clock; frequency locking; simulation model; fuzzy PID

## 0 引言

冷原子喷泉钟按工作原子种类不同分为铯原子喷泉钟和铷原子喷泉钟。前者一般作为频率基准复现秒定义,后者主要应用在守时时。冷原子喷泉钟在卫星导航、基础物理研究等领域发挥着重要作用<sup>[1-3]</sup>。冷原子喷泉钟频率锁定是为了实现激励微波源的中心频率与原子跃迁频率的锁定。具体方法为在两个喷泉钟周期中,测量方波频率调制的跃迁几率的差值,通过计算可以得到频率误差信号,一般通过数字比例—积分—微分(proportional integral derivative, PID)算法反馈至本地振荡器或者频率综合器的某些模块<sup>[4-7]</sup>。冷原子喷泉钟的频率锁定系统的性能直接影响喷泉钟的短期稳定度和噪声抑制能力。传统的PID控制方法在喷泉钟频率锁定中成效显著,但在噪声抑制、动态响应等方面仍存在着优化空间。近年来,智能控制算法(如模糊控制、自适应控制等)在精密测量系统中的成功应用,为喷泉钟频率锁定技术的改进提供了新的思路<sup>[8-10]</sup>。为深入探究喷泉钟频率锁定的动态特性并优化控制策略,首先利用Python程序建立了冷原子喷泉钟频率锁定的仿真模型,并通过与实验数据比对确定了喷泉钟的附加频率噪声。所建立的模型为后续控制算法的设计与验证提供了可靠基础。在此基础上,进一步提出将模糊PID控制引入喷泉钟频率锁定系统,以改善传统PID方法的性能。模糊PID能够通过动态调整控制参数,更好地适应喷泉钟工作过程中的不确定性,从而提升频率锁定的鲁棒性和抗干扰能力。通过仿真计算,验证了模糊PID在冷原子喷泉钟实验中对于降低频率波动、增强抗干扰能力等方面的积极作用。

## 1 频率锁定仿真模型的建立

冷原子喷泉钟利用原子的超精细能级跃迁的频率来复现秒定义或对输入的微波信号鉴频。在冷原子喷泉钟的一个周期内,原子经历了激光冷却、向上抛射、原子选态、向上向下两次与微波腔作用、原子能态的探测。具体来说,冷原子喷泉钟运行时,需要先利用激光冷却技术将原子冷却到极低的温度并形成密集原子云。冷却后的原子云在激光频率失谐作用下被向上抛射。向上运动过程中,经过与选态微波作用,部分原子被制备到了基态,然后在推光的作用下,不在基态的冷原子被推离原子云。

制备好的基态冷原子云在重力的作用下继续先上升再下落的上抛运动,运动过程中经过激励微波腔(也被称作Ramsey微波腔)2次。微波腔内有一个谐振频率与原子超精细跃迁频率相匹配的微波场。当原子第1次通过微波腔时,微波场会与原子发生相互作用,使部分原子从基态跃迁到激发态。之后原子继续向上运动,达到顶点后开始下落,再次通过同一个微波腔。第2次通过时,微波场再次与原子相互作用,完成Ramsey干涉的过程。此时,包含鉴频信息的冷原子按一定概率分布在超精细能级的基态和激发态上,并继续下落。下面的探测区分别对基态和激发态的原子数目进行测量,经过数据处理得到频率误差信号。频率误差信号会被用来调整微波源的频率,形成一个闭环控制系统<sup>[11]</sup>。

冷原子喷泉钟的原子跃迁频率在微波频段,铯原子的跃迁频率约为9.2 GHz,铷原子的跃迁频率约为6.8 GHz<sup>[12-13]</sup>。而本地振荡器(local oscillator, LO)的频率一般为5、10、100 MHz。这就需要通过倍频器件和频率综合器将LO的频率提升至原子跃迁的微波频率。实验中,如图1所示,采用5 MHz恒温晶振,100 MHz晶振经过两级锁相环锁相至国产氢钟,其输出的100 MHz信号(图1中②所示)作为喷泉钟的LO<sup>[14]</sup>。使用多通道比相仪,以VCH-1003M氢钟输出高稳定度的100 MHz为参考源,测量并记录LO的频率数据,比相仪采样间隔为1 s。

由于上述测量的参考源VCH-1003M氢钟稳定度远优于国产氢钟,因此测量的频率结果可以看做LO的频率数据。一般来说,冷原子喷泉钟的激励微波源对LO进行了倍频和频率综合操作,但相对频率偏差是保持不变的。相对频率偏差 $y(t)$ 表示为:

$$y(t) = \frac{v(t) - v_{nom}}{v_{nom}} \quad (1)$$

其中, $v(t)$ 为随时间变化的频率值, $v_{nom}$ 为名义频率值。

冷原子喷泉钟的Ramsey干涉条纹在中心条纹附近可近似为:

$$p(\delta v) \approx \frac{1}{2} [A \cos(2\pi \cdot \delta v \cdot T) + 1] \quad (2)$$

其中, $\delta v$ 为微波场频率 $v$ 相对于原子系综共振频率 $v_0$ 的失谐量,即 $\delta v = v - v_0$ , $A$ 为Ramsey干涉条纹跃迁几率最大值与最小值的差, $T$ 为单个喷泉钟周期中2次微波作用间的时间间隔。中心条纹的半高全宽度满足 $\Delta v = 1/(2T)$ 。

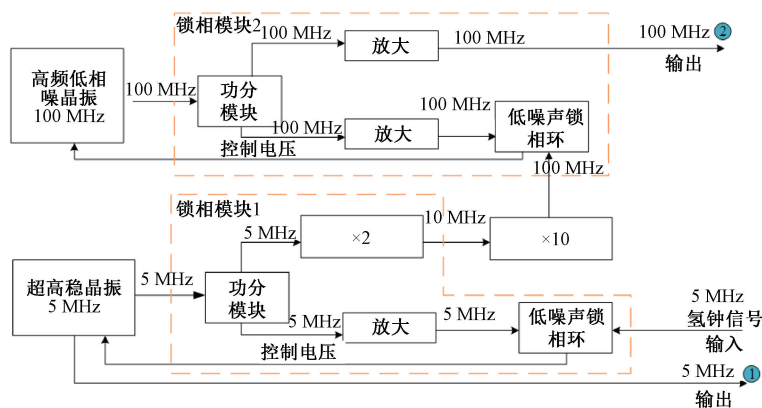


图1 本地振荡器结构

Fig. 1 The structure of local oscillator

冷原子喷泉钟锁定运行时,需对微波频率方波调制,调制周期为喷泉钟上抛周期的2倍,调制深度为 $\pm\Delta\nu/2$ 。在两个喷泉钟周期中,激励腔馈入的微波频率分别为 $\nu - \Delta\nu/2$ 和 $\nu + \Delta\nu/2$ ,对应的跃迁几率分别为 $p_-$ 和 $p_+$ ,则跃迁几率差值 $\delta p = p_- - p_+$ 与频率误差信号 $\delta\nu$ 满足:

$$\delta p \approx (1 + A \cdot \pi \cdot \delta\nu / \Delta\nu) / 2 - (1 - A \cdot \pi \cdot \delta\nu / \Delta\nu) / 2 = A \cdot \pi \cdot \delta\nu / \Delta\nu \quad (3)$$

由式(3)可以看出, $\delta p$ 与 $\delta\nu$ 成正比例关系,比例系数为 $A \cdot \pi / \Delta\nu$ 。在得到 $\delta p$ 与 $\delta\nu$ 后,使用PID算法,计算频率的修正值 $u(k)$ ,即:

$$u(k) = k_p e(k) + k_i \sum_{n=0}^k e(k) + k_d [e(k) - e(k-1)] \quad (4)$$

其中, $e(k)$ 为第 $k$ 次喷泉钟周期中测得的误差信号。 $e(k)$ 可以使用 $\delta p$ ,或者使用 $\delta\nu$ 。由于这两个值成正比例关系,使用这两者之间的区别在于式(4)中的3个系数—— $k_p$ 、 $k_i$ 和 $k_d$ ,是否需要再乘上式(3)中的比例系数 $A\pi/\Delta\nu$ ,为了方便,可以将此比例系数记为 $C$ 。

另外在喷泉钟测量参考源的相对频率误差信号 $\delta\nu$ 时,会叠加上喷泉钟附加的噪声,噪声主要来源为量子鉴频系统和微波系统,这两者均表现为白频率噪声特征<sup>[15]</sup>,因此喷泉钟测得的参考源的相对频率偏差的值上要加上均值为0,标准差为 $\sigma/\sqrt{\tau}$  ( $\tau$ 为采样时间)的高斯频率白噪声。包含这个噪声的误差信号 $e(k)$ 会在式(4)的PID计算后得到频率修正值。

由于喷泉钟是周期运行的,在一个喷泉钟周期内,只有部分时间发生了原子与微波的相互作用。为了更好地仿真喷泉钟的锁频过程,需要拆分原子与微波的作用时间段。实验使用的喷泉钟为铷原子喷泉钟,周期为1.2 s。喷泉钟周期内原子简化的轨迹分区如图2所示,大致分为3个部分。最初的大约500 ms是原子冷却并向上飞行至 Ramsey 微波腔前的时间;之后的约500 ms

为冷原子与 Ramsey 微波腔作用和 Ramsey 上方自由飞行的时间;最后的200 ms为冷原子离开 Ramsey 微波腔下落并完成探测的时间。完成相互作用的原子进入磁光阱区域,在磁光阱中被冷却和捕获,形成一个低温、高密度的原子云,可以进一步用于后续的量子测量、干涉实验、原子钟频率参考。中间的500 ms部分可以认为是原子与微波的作用时间段。实际喷泉钟使用了方波调制,因此两个周期锁定一次频率,即每2.4 s时间内使用了2次500 ms的原子与微波作用时间。

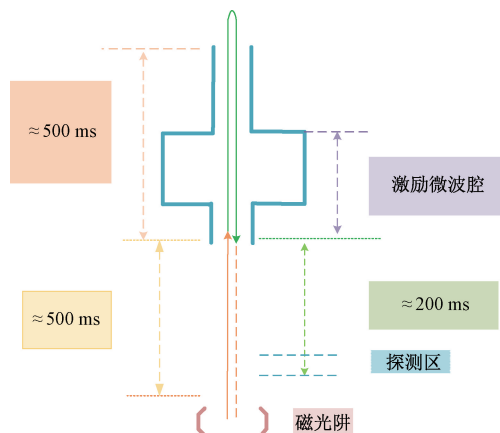


图2 原子与微波腔的相互作用

Fig. 2 The interaction between atoms and microwave cavities

根据以上的模型及理论分析,建立喷泉钟仿真模型的过程为:

1) 将比相仪测得的采样时长为1 s的LO的频率数据,假设数据共计 $N$ 个,按照式(1)计算出相对频率偏差值,并使用插值的方法得到采样时长为0.1 s的频率数据,数据共计 $10N$ 个。

2) 根据喷泉钟周期运行的特点,对过程1)得到的数据按2.4 s周期分段,即每24个数据为一个新的数

据段,如果有多余部分,则抛弃。每个数据段中的24个数据,抽取第6~10个和第18~22个,共计10个数据,求取平均数,作为喷泉钟一个频率锁定周期的输入相对频率偏差数据。这样得到新的数据长度约为 $10N/24$ 个。

3) 由于喷泉钟运行过程中会引入噪声,为了仿真喷泉钟的频率测量,需要在过程2)得到的数据加上一个均值为0,标准差为 $\Sigma = \sigma / \sqrt{\tau}$  (此时 $\tau = 2.4$  s)的高斯白噪声,得到新的数据长度仍然为 $10N/24$ 个,记为 $D$ 。

4) 第 $k$ 个过程3)得到的值 $D(k)$ 与频率设定值 $u(k)$ 的差值作为第 $k+1$ 次PID过程的误差信号 $e(k+1)$ ,使用喷泉钟测量时的PID参数,经过PID计算,得到频率的输出值 $u(k+1)$ 。初始值的 $u(0)$ 设为 $D(0)$ 。最终得到频率设定值数组 $u$ 。

5) 数组 $u$ 作为仿真喷泉钟频率锁定数据,与同时间段喷泉钟实际测量的相对频率偏差数据分别计算Allan方差,进行比较,确定相关参数,完成仿真。

上述仿真过程,有两个参数需要通过与实验值对比来确定,一个是过程3)中的高斯白噪声的标准差 $\Sigma$ 。另一个是前文中PID计算时 $e(k)$ 使用 $\delta p$ 与 $\delta v$ 引入的比例系数 $C$ ,因为喷泉钟实验使用的是 $\delta p$ ,而仿真使用的是 $\delta v$ 。

实验数据使用 $k_p = 0.15, k_i = 0.001, k_d = 0.02$ ,则仿真数据使用的 $k_p = 0.15 \cdot C, k_i = 0.001 \cdot C, k_d = 0.02 \cdot C$ 。在喷泉钟实验中,测量Ramsey干涉条纹跃迁几率最大值与最小值的差 $A$ 约为0.94,中心条纹的半高全宽度 $\Delta\nu$ 约为1.1 Hz,由此计算得到 $C = A\pi/\Delta\nu \approx 2.7$ 。

在 $C = 2.7$ 时,使用不同标准差 $\Sigma$ 的高斯白噪声,计算得到仿真数据与实验数据的Allan标准偏差图如图3所示。

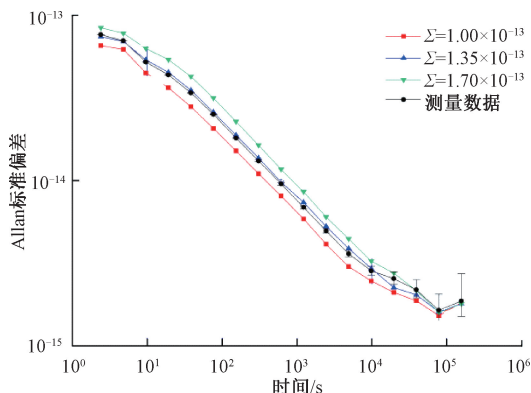


图3 不同高斯频率白噪声的仿真值与实验测量值的Allan标准偏差对比

Fig. 3 Comparison of Allan standard deviation between simulated and experimentally measured values of white noise with different Gaussian frequencies

从图3中可以看到, $\Sigma$ 越大,Allan标准偏差的值越大,反之亦然。且在 $\Sigma = 1.35 \times 10^{-13}$ 时,与实验数据吻合得较好。因此,可以确定喷泉钟测量时额外增加的噪声中,包含的相对频率偏差的白噪声 $\Sigma$ 约为 $1.35 \times 10^{-13}$ 。在 $\Sigma = 1.35 \times 10^{-13}$ ,使用不同的比例系数 $C$ 的仿真数据与实验测量数据的Allan标准偏差图如图4所示。

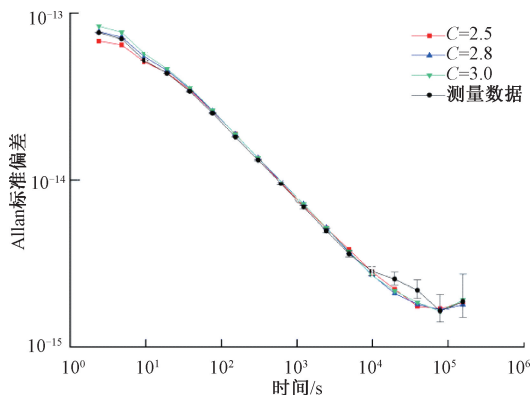


图4 不同比例系数 $C$ 的仿真值与实验测量值的Allan标准偏差对比

Fig. 4 Comparison of Allan standard deviation between simulated values and experimentally measured values with different proportional coefficients  $C$

从图4中可以看出,不同的比例系数主要影响40 s以内的Allan标准偏差,且当 $C = 2.8$ 时,仿真数据与实验测量数据的Allan标准偏差吻合得最好,因此,可以确定此次测量的比例系数 $C$ 约为2.8。

## 2 喷泉钟模糊PID仿真实验

在得到比例系数 $C$ 和喷泉钟附加的高斯频率白噪声标准偏差 $\Sigma$ 的基础上,下面尝试仿真模糊控制PID对于喷泉钟的作用。模糊PID控制算法在继承传统PID控制器动态响应特性的前提下,通过建立误差信号与参数集的模糊映射关系,采用实时参数自适应机制对比例、积分、微分系数进行动态修正,这种基于模糊推理的变参数策略可有效克服传统固定参数PID在非线性时变系统中的调节滞后问题,显著提升复杂工况下的跟踪精度。

在喷泉钟的控制系统中,模糊化过程涉及将频率输入误差的取值范围映射到相应的论域上。仿真喷泉钟模糊PID控制器采用两输入、三输出的结构,其中模糊控制器的输入为偏差 $e$ 与偏差变化率 $de$ ,输出则为PID控制器参数的修正量 $\Delta k_p, \Delta k_i$ 与 $\Delta k_d$ ,如图5所示。

具体来说,在控制系统运行过程中,首先对输入的偏差 $e$ 和偏差变化率 $de$ 进行模糊化处理,将其转换为模糊集。然后,通过模糊推理机制根据预设的规则库计算出



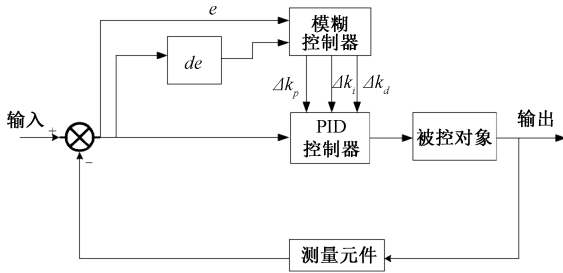


图5 模糊控制PID结构

Fig. 5 Fuzzy control PID structure

模糊输出。最后,通过清晰化步骤将这些模糊输出转化为具体的数值,即PID参数的修正量 $\Delta k_p$ 、 $\Delta k_i$ 和 $\Delta k_d$ <sup>[16]</sup>。这些修正量被实时反馈给PID控制器,以调整其控制行为,从而确保喷泉钟频率在噪声环境中能够得到有效控制。通过这种动态调整PID参数的方法,不仅可以提高系统的响应速度和稳定性,还能更好地适应喷泉钟稳定运行的需求,确保即使在存在干扰的情况下也能保持高精度的频率控制。

模糊化的核心在于运用隶属函数,把精确的输入值转化为模糊集合的隶属度。具体流程为:首先,对控制偏差( $e$ )及其变化率( $de$ )进行归一化处理,将其映射到合适的论域范围;接着,借助隶属度函数,量化控制偏差及变化率与预设模糊子集的匹配程度;基于此,构建模糊推理机制,通过逻辑推理动态生成PID参数(比例、积分、微分)的实时调节规则,最终实现系统的自适应控制<sup>[17-18]</sup>。

模糊规则的标准化设计采用Mamdani方法<sup>[19]</sup>。具体步骤如下:首先,针对误差 $e$ 和误差变化率 $de$ 来确定其模糊子集。在模糊PID控制中,为保证具备足够的精度,选取了负大[NB]、负中[NM]、负小[NS]、零[ZO]、正小[PS]、正中[PM]和正大[PB]这7个变量来表征这些模糊子集,由此将误差 $e$ 和误差变化率 $de$ 的模糊子集定义为{NB,NM,NS,ZO,PS,PM,PB}。接着,对与误差 $e$ 和误差变化率 $de$ 的模糊集相对应的论域进行定义,具体论域范围是{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6}。在实际情况中,任何物理量测量信号都存在在一个特定的量程范围,这里将其记为 $e_{\max}$ ,而偏差的变化范围则记为 $de_{\max}$ 。当采用线性方式对误差 $e$ 和误差变化率 $de$ 进行量化时,存在相应的函数关系,即:

$$f(e) = \frac{6e}{e_{\max}} k_e \quad (5)$$

$$f(de) = \frac{6de}{de_{\max}} k_{de} \quad (6)$$

其中,当 $k_e$ 和 $k_{de}$ 的值取常数时,后续仿真实验的锁定频率结果出现频率发散或者模糊控制不起作用的问题<sup>[20-21]</sup>。因此需要将 $k_e$ 和 $k_{de}$ 非线性化,即:

$$k_e = 1 - \exp\left(-\alpha \frac{e}{e_{\max}}\right) \quad (7)$$

$$k_{de} = 1 - \exp\left(-\alpha \frac{de}{de_{\max}}\right) \quad (8)$$

这样,在 $e$ 和 $de$ 的值较小时,模糊化数值 $f(e)$ 和 $f(de)$ 接近为0,可以有效抑制频率噪声对模糊控制PID的影响,保证喷泉钟频率的稳定输出。当模糊化值确定后,就可以确定误差 $e$ 和误差变化率 $de$ 在各模糊子集上的隶属度,该数值范围介于0~1,用以量化输入数据属于特定模糊子集的程度<sup>[22]</sup>。通常,这种量化关系通过隶属度函数来表达。在本次测试中,选用三角隶属度函数表达,其中输入量的隶属度函数如图6所示<sup>[23]</sup>。

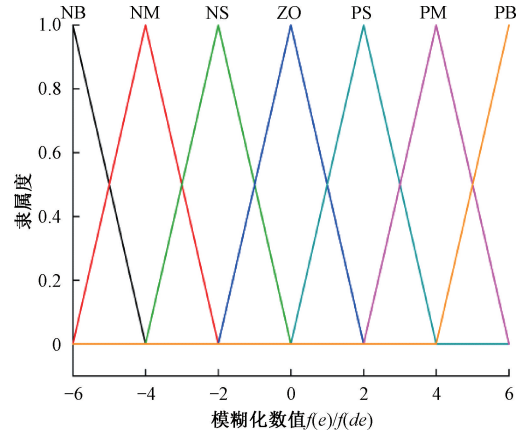


图6 输入量的三角隶属度函数

Fig. 6 Triangular membership function of input

针对冷原子喷泉钟的频率控制需求,归纳出如表1所示的模糊控制规则。如表1所示,当 $e = \text{NB}$ 且 $de = \text{NB}$ 时,系统将显著增大比例项( $\Delta k_p = \text{PB}$ )、削弱积分项( $\Delta k_i = \text{NB}$ )、适度增强微分项( $\Delta k_d = \text{PS}$ ),以此实现参数的自适应整定<sup>[24]</sup>。

在Mamdani模糊推理系统中,模糊推理输出的参数调整量( $\Delta k_p$ 、 $\Delta k_i$ 、 $\Delta k_d$ )呈现为模糊值,无法直接驱动执行机构,需经过清晰化处理,将其转化为精确数值<sup>[25-26]</sup>。

$$u = k_u \frac{\sum_{i=0}^n M_i \cdot F_i}{\sum_{i=0}^n M_i} \quad (9)$$

其中, $u$ 为清晰化后的精确值, $K_u$ 为输出量的模糊论域到物理论域的比例因子, $M$ 为隶属度, $F$ 为输出。

模糊控制器的 $k_p$ 、 $k_i$ 、 $k_d$ 值得到的方式为:上一次的值 $k'_p$ 、 $k'_i$ 、 $k'_d$ 分别与模糊控制器输出的修正量 $\Delta k_p$ 、 $\Delta k_i$ 、 $\Delta k_d$ 进行相加, $k_p$ 、 $k_i$ 、 $k_d$ 的初始值为 $k_{p0}$ 、 $k_{i0}$ 和 $k_{d0}$ ,即:

$$\begin{cases} k_p = k'_p + \Delta k_p \\ k_i = k'_i + \Delta k_i \\ k_d = k'_d + \Delta k_d \end{cases} \quad (10)$$

表 1  $\Delta k_p, \Delta k_i, \Delta k_d$  模糊控制规则

Table 1 Fuzzy control rules for  $\Delta k_p, \Delta k_i$ , and  $\Delta k_d$

$\Delta k_p/\Delta k_i/\Delta k_d$		$de$						
		NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
$e$	NB	PB/NB/PS	PB/NB/NS	PM/NM/NB	PM/NM/NB	PS/NS/NB	ZO/ZO/NM	ZO/ZO/PS
	NM	PB/NB/PS	PB/NB/NS	PM/NM/NB	PS/NS/NM	PS/NS/NM	ZO/ZO/NS	NS/ZO/ZO
	NS	PM/NB/ZO	PM/NM/NS	PM/NS/NM	PS/NS/NM	ZO/ZO/NS	NS/PS/NS	NS/PS/ZO
	ZO	PM/NM/ZO	PM/NM/NS	PS/NS/NS	ZO/ZO/NS	NS/PS/NS	NM/PM/NS	NM/PM/ZO
	PS	PS/NM/ZO	PS/NS/ZO	ZO/ZO/ZO	NS/PS/ZO	NS/PS/ZO	NM/PM/ZO	NM/PB/ZO
	PM	PS/ZO/PB	ZO/ZO/NS	NS/PS/PS	NM/PS/PS	NM/PM/PS	NM/PB/PS	NB/PB/PB
	PB	ZO/ZO/PB	ZO/ZO/PM	NM/PS/PM	NM/PM/PM	NM/PM/PS	NB/PB/PS	NB/PB/PB

3 模糊 PID 仿真与实验结果

为了验证模糊 PID 的效果,对比传统 PID 的仿真数据。传统 PID 控制器 3 个参数的初始值分别为  $k_{p0} = 0.15 \times 2.8 = 0.42, k_{i0} = 0.001 \times 2.8 = 0.0028, k_{d0} = 0.02 \times 2.8 = 0.056$ 。通过多次模糊 PID 仿真后,式(9)中的比例因子确定为  $K_{\Delta p} = 0.02, K_{\Delta i} = 0.01, K_{\Delta d} = 0.02$ 。

两种控制算法仿真的喷泉钟输出频率信号的稳定度如图 7 所示,方形点为传统 PID 控制输出值的 Allan 标准偏差,圆点为模糊 PID 控制输出值的 Allan 标准偏差。

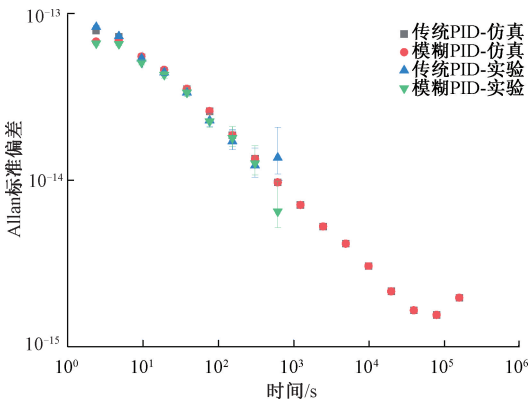


图 7 模糊 PID 与传统 PID 仿真输出频率的稳定度对比

Fig. 7 Comparison of frequency stability between fuzzy PID and traditional PID simulation output

从图 7 中的 Allan 标准偏差曲线可以看出,模糊 PID 控制输出频率短期频率稳定度比传统 PID 更好一些,而中长期频率稳定度则趋于一致,这说明模糊 PID 有抑制短期较大频率噪声的作用。通过跟踪模糊 PID 仿真中  $k_p, k_i, k_d$  的变化发现,在随机噪声特征明显的误差信号输入下,  $k_p, k_i$  会稳定在其初始值附近,而  $k_d$  会最终变为 0,

这是造成模糊 PID 与传统 PID 频率输出值短期稳定度差异的主要原因。这也说明,在类似的锁定频率实验中,传统 PID 可以直接使用线性项和积分项,不使用微分项,也能达到较好的锁定效果。

为了验证上述仿真结果,同参数的传统 PID 和模糊 PID 被用到了实验当中,进行了短时间的实验,得到 Allan 标准偏差曲线分别如图 7 中的上三角与下三角所示。实验结果与仿真结果基本一致,这也证实了仿真模型的有效性。

为测试传统 PID 和模糊 PID 控制对于输入频率的正负频率跳变的冲击响应,通过将仿真过程的第 1 步比相仪测得的数据进行修改,对 100 s 附近连续连个数值的相对频率偏差值分别增加  $1 \times 10^{-11}$  和减少  $1 \times 10^{-11}$ ,后续以传统 PID 和模糊 PID 分别仿真喷泉钟的输出频率,如图 8 所示,方形点为仿真过程第 3 步喷泉钟测得的叠加高斯频率白噪声的相对频率偏差数据,也是传统 PID 和模糊 PID 误差输入信号。圆点为传统 PID 频率输出数据,三角形点为模糊 PID 频率输出数据。从图 8 中可以看出模糊 PID 对于正负频率跳变的有一定的抑制作用。

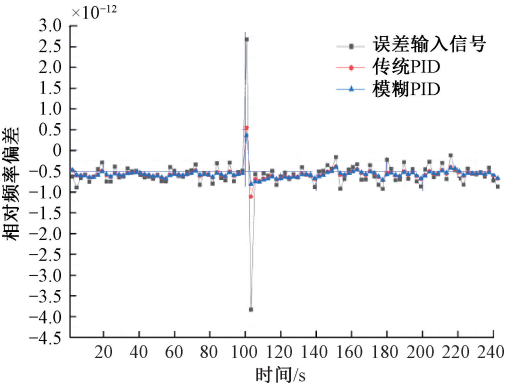


图 8 频率正负跳变的冲击响应

Fig. 8 Impulse response of positive and negative frequency jumps

为测试传统 PID 和模糊 PID 对于频率阶跃变化的响应,通过将仿真过程的第 1 步比相仪测得的数据进行修改,对 100 s 之后的所有的相对频率偏差值一组是全部加上  $5\times 10^{-12}$ ,另一组是全部减去  $5\times 10^{-12}$ ,形成不同方向的频率跳变,再继续仿真传统 PID 和模糊 PID 频率输出。如图 9 和 10 所示,方形点为仿真过程第 3 步喷泉钟测得的叠加高斯频率白噪声的相对频率偏差数据,也是传统 PID 和模糊 PID 误差输入信号,圆点为仿真的传统 PID 频率输出结果,三角形点为仿真的模糊 PID 的频率输出结果。从图 9 和 10 中可以看出模糊 PID 的频率输出响应和传统 PID 的频率输出响应略快一些,但并不明显。

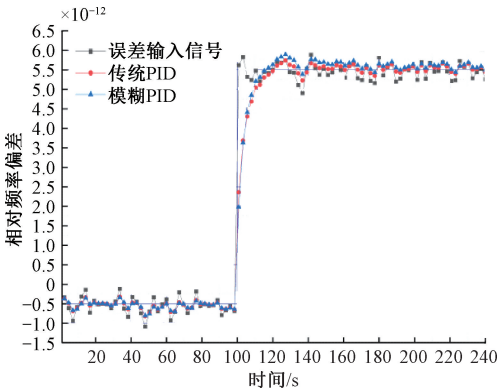


图 9 上台阶阶跃响应

Fig. 9 Step response of the ascending step

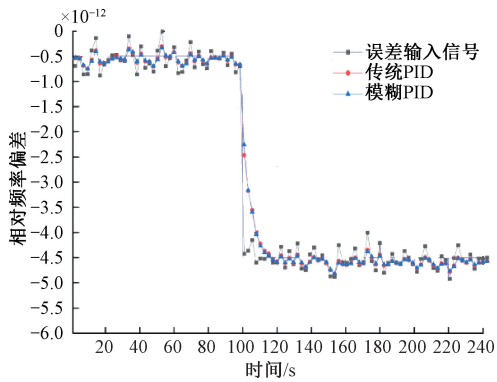


图 10 下台阶段阶跃响应

Fig. 10 Step response of the descending step

4 结 论

针对冷原子喷泉钟频率锁定系统的优化问题,建立了基于 Python 的仿真模型,并对比分析了传统 PID 控制与模糊 PID 控制的性能差异。通过仿真与实验数据的对比,确定了喷泉钟系统的关键参数,包括附加白频率噪声水平 ( $\sigma/\sqrt{\tau}=1.35\times 10^{-13}$ ) 和误差信号比例系数

( $C=2.8$ )。在此基础上,提出了一种改进的模糊 PID 控制策略,通过动态调整 PID 参数,一定程度上提高了系统的抗干扰能力和短期频率稳定度。

仿真结果表明,模糊 PID 控制在短期噪声抑制方面优于传统 PID 控制,Allan 方差分析显示其短期稳定度提升了约 14.2%。将此仿真应用到实验中,得到了类似的实验结果,这也证明了此仿真模型的有效性。此外,模糊 PID 对突发性频率跳变 ( $\pm 1\times 10^{-11}$ ) 有一定的抑制能力,但在系统性频率阶跃 ( $\pm 5\times 10^{-12}$ ) 下的响应速度与传统 PID 相当。未来研究可进一步优化模糊规则库,并结合自适应控制或卡尔曼滤波,以提升系统对复杂噪声环境的适应能力。

参考文献

[ 1 ] 宋明顺,方兴华,马爱文,等. 论新国际单位制(SI)的“秒制”特征及其未来发展[J]. 计量学报,2019,40(4): 541-548.  
SONG M SH, FANG X H, MA AI W, et al. The characteristics of the new SI base on “Second System” and its future developmen[J]. Acta Metrologica Sinica, 2019,40(4):541-548.  
[ 2 ] SORTAIS Y, BIZE S, NICOLAS C, et al. Cold collision frequency shifts in a <sup>87</sup>Rb atomic fountain[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(15): 3117-3120.  
[ 3 ] FERTIG C, GIBBLE K. Measurement and cancellation of the cold collision frequency shift in an <sup>87</sup>Rb fountain clock[J]. Physical Review Letters, 2000,85(8):1622-1625.  
[ 4 ] 李慧,杜远博,刘洪力,等. 用于本地时标系统的铯原子喷泉钟研制[J]. 华中科技大学学报(自然科学版),2022,50(9):23-29.  
LI H, DU Y B, LIU H L, et al. Development of cesium fountain clock for local time scale system[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology ( Natural Science Edition), 2022,50(9):23-29.  
[ 5 ] WANG X L, RUAN J, LIU D D, et al. First evaluation of the primary frequency standard NTSC-CsF2 [ J ]. Metrologia, 2023,60(6):065012.  
[ 6 ] GOTI I, CONDIO S, CLIVATI C, et al. Absolute frequency measurement of a Yb optical clock at the limit of the Cs fountain [ J ]. Metrologia, 2023, 60(3): 035002.  
[ 7 ] 刘昆,房芳. 基准微波原子钟[J]. 物理, 2023, 52(7): 441-448.  
LIU K, FANG F. Benchmark microwave atomic

- clock[J]. Physics, 2023,52(7): 441-448.
- [8] 许云鹏,赵远,汪子楷,等. 用于原子干涉仪激光频率锁定的集成化系统[J]. 计测技术,2025,45(2): 33-39.
- XU Y P, ZHAO Y, WANG Z K, et al. An integrated system for laser frequency locking in atomic interferometers[J]. Measurement Technology, 2025, 45(2): 33-39.
- [9] 洪毅,侯霞,陈迪俊,等. 基于  $\text{Rb}^{87}$  调制转移光谱稳频技术研究[J]. 中国激光,2021,48(21): 21-28.
- HONG Y, HOU X, CHEN D J, et al. Research on frequency stabilization technology of modulation transfer spectroscopy based on  $\text{Rb}^{87}$  [J]. Chinese Journal of Lasers, 2021,48(21): 21-28.
- [10] 严妮,陈书鹏,吕宗阳. 基于锁相环结构的恒温晶振频率锁定系统设计[J]. 集成电路与嵌入式系统,2025: 1-10[2025-08-10].
- YAN N, CHEN SH P, LYU Z Y. Design of constant temperature crystal oscillator frequency locking system based on phase-locked loop structure [J]. Integrated circuit and embedded system, 1-10[2025-08-10].
- [11] 陈伟亮,刘昆,郑发松,等. 长期稳定度  $2.6 \times 10^{-16}$  的工程化高可靠铷原子喷泉钟[J]. 仪器仪表学报, 2024,45(2): 79-86.
- CHEN W L, LIU K, ZHENG F S, et al. Engineering high reliability rubidium atomic fountain clock with long-term stability of  $2.6 \times 10^{-16}$  [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2024,45(2): 79-86.
- [12] CHEN W L, FANG F, LIU K, et al. Development of Rb fountain clock for time keeping[J]. Frontiers in Physics, 2022(10): 956452.
- [13] LIU K, ZHENG F S, CHEN W L, et al. Development of commercial fountain clocks in NIM[C]. 9th Symposium on Frequency Standards and Metrology, 2024: 012046.
- [14] ZHANG H, RUAN J, LIU D D, et al. Development and preliminary operation of  $^{87}\text{Rb}$  continuously running atomic fountain clock at NTSC [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2022,71(1): 1-12.
- [15] 王倩,魏荣,王育竹,等. 原子喷泉频标:原理与发展[J]. 物理学报,2018,67(16): 154-170.
- WANG Q, WEI R, WANG Y ZH, et al. Atomic fountain frequency standard: Principle and development[J]. Acta Physica Sinica, 2018,67(16): 154-170.
- [16] 李国林. PID 控制器参数整定技术与优化设计[D]. 大连:大连理工大学,2010.
- LI G L. Research and optimization design of PID controller parameter tuning technology [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2010.
- [17] 周向阳,贾媛. 航空遥感惯性稳定平台模糊/PID 复合控制[J]. 仪器仪表学报,2016,37(11): 2545-2554.
- ZHOU X Y, JIA Y. Fuzzy/PID composite control of inertial stabilization platform for aerial remote sensing[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2016, 37(11): 2545-2554.
- [18] 罗哉,唐颖奇,李冬,等. 基于最优偏差路径的自动驾驶车纠偏方法[J]. 仪器仪表学报,2017,38(4): 853-860.
- LUO Z, TANG Y Q, LI D, et al. Automatic guided vehicle correction method based on optimal deviation path[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2017, 38(4): 853-860.
- [19] 高彤,王贵君. 基于模糊相似度的广义 Mamdani 模糊系统及其逼近[J]. 模糊系统与数学,2018,32(1): 137-143.
- GAO T, WANG G J. Generalized Mamdani fuzzy system and its approximation based on fuzzy similarity[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2018, 32(1): 137-143.
- [20] 邵诚,董希文,王晓芳,等. 变论域模糊控制器伸缩因子的选择方法[J]. 信息与控制,2010,39(5): 536-541.
- SHAO CH, DONG X W, WANG X F, et al. Method for selecting the scaling factor of variable domain fuzzy controllers[J]. Information and Control, 2010,39(5): 536-541.
- [21] 孙非,崔特,曹宇赫,等. 基于模糊反馈线性化和自适应扩张状态观测器的 USM 六自由度镇定控制[J]. 仪器仪表学报,2024,45(5): 311-318.
- SUN F, CUI T, CAO Y H, et al. USM six degree of freedom stabilization control based on fuzzy feedback linearization and adaptive extended state observer[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2024,45(5): 311-318.
- [22] 李特,葛宇航,艾靖超,等. 锥形薄壁筒内轮式加工机器人自适应运动控制[J]. 仪器仪表学报,2023,44(5): 90-99.
- LI T, GE Y H, AI J CH, et al. Adaptive motion control



- of conical thin-walled cylinder inner wheeled machining robot [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2023, 44(5): 90-99.
- [23] 张威,何锋. 基于GA优化模糊PID的纯电动汽车动力总成温度控制[J]. 农业装备与车辆工程, 2023, 61(3): 21-25.
- ZHANG W, HE F. Temperature control of pure electric vehicle powertrain based on GA optimized fuzzy PID[J]. Agricultural Equipment and Vehicle Engineering, 2023, 61(3): 21-25.
- [24] 周向阳,舒通通,吕子豪,等. 基于模糊切换增益调节的惯性稳定平台滑模控制[J]. 仪器仪表学报, 2021, 42(12): 263-271.
- ZHOU X Y, SHU T T, LYU Z H, et al. Sliding mode control of inertial stable platform based on fuzzy switching gain adjustment [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2021, 42(12): 263-271.
- [25] 钱虹,宋昊泽. 核电站稳压器压力自适应变论域模糊控制[J/OL]. 控制工程, 1-9[2025-08-10].
- QIAN H, SONG H Z. Adaptive domain fuzzy control of pressure regulator in nuclear power plants [J/OL]. Control Engineering, 1-9[2025-08-10].
- [26] 张楠,凌菁,吴庭,等. 变论域优化模糊PID控制器参数的温度控制[J]. 计算机仿真, 2024, 41(7): 376-382.

ZHANG N, LING J, WU T, et al. Temperature control of fuzzy PID controller parameters optimized by variable universe[J]. Computer Simulation, 2024, 41(7): 376-382.

## 作者简介



**李悦**, 2021年于商丘工学院获得学士学位, 现为中国计量大学硕士研究生, 主要研究方向为铷原子喷泉钟输出标准频率方法研究。

E-mail: lll\_yuuue@163.com

**Li Yue** received her B. Sc. degree from Shangqiu Institute of Technology in 2021. She is currently a master's student at China Jiliang University. Her main research interest is the output standard frequency method of the rubidium atomic fountain clock.



**刘昆**(通信作者), 2005年于清华大学获得学士学位, 2010年于清华大学获得博士学位, 现为中国计量科学研究院副研究员, 主要研究方向为量子频标及时间频率计量。

E-mail: liukun@nim.ac.cn

**Liu Kun** (Corresponding author) received his B. Sc. and Ph. D. degrees both from Tsinghua University in 2005 and 2010, respectively. He is currently an associate researcher at National Institute of Metrology. His main research interests include frequency standards and time and frequency metrology.