

不可靠 WSN 时钟同步网络化输出 反馈 MPC 量化分析*

王 頔, 万羊所, 唐晓铭, 黄庆卿, 李永福

(重庆邮电大学 工业物联网与网络化控制教育部重点实验室 重庆 400065)

摘 要:在 Cyber-Physical 环境下, 时钟同步双向信息交换过程中, 包含时钟信息的数据包丢失将对时钟同步性能产生影响。讨论了现代控制理论状态空间模型的输出反馈 Tubes-MPC 时钟同步方法。由分离原理, 设计了本地化的状态估计器与控制器, 实现了输出反馈 Tubes-MPC 时钟同步的指数稳定。以不完全量测下的观测模型为基础, 定量分析了统计意义下的同步误差方差上界与下界, 并采用 MPC 中 Set-Theory-in-Control 方法, 将完全量测下的干扰误差集合运算于由丢包所引入的附加的估计误差集合, 建立了集合约束下的模型预测优化模型。已构建的统一框架下的输出反馈 Tubes-MPC 时钟同步系统化方法, 综合考量了控制理论在线计算复杂度与网络控制观点应用的可行性, 对无线网络的不可靠性、网络规模、收敛性能具有鲁棒性, 进一步容易扩展为网络级绝对时钟状态空间模型。

关键词: 时钟同步; 丢包; 同步精度; 模型预测控制; 同步误差

中图分类号: TP393 TH701 文献标识码: A 国家标准学科分类代码: 510.5015

Unreliable WSN clock synchronization networked output feedback model predictive control quantitative analysis

Wang Ting, Wan Yangsuo, Tang Xiaoming, Huang Qingqing, Li Yongfu

(Key Laboratory of Industrial Internet of Things & Networked Control, Ministry of Education,
Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: In the cyber-physical environment, the loss of packet with clock information will have an impact on clock synchronization performance during clock synchronization bi-directional information exchange process. This paper discusses the output feedback model predictive control based on tubes (Tubes-MPC) clock synchronization method based on the state space model of modern control theory. Based on the principle of separation, the localized state estimator and controller are designed. And the exponential stability of the output feedback Tubes-MPC clock synchronization is realized. Based on the observation model under incomplete measurement, the upper bound and lower bound of the variance of synchronization error in statistical meaning are analyzed quantitatively, and using the Set-Theory-in-Control method in MPC, the interference error set under complete measurement is intersected with the set of additional estimation errors introduced by packet loss. The optimization model of model prediction under set constraints is established. The constructed output feedback Tubes-MPC clock synchronization systematic method in a unified framework comprehensively considers the application feasibility of control theory online computational complexity and network control perspective, has robustness to the unreliability, network size and convergence performance of wireless network, and can be easily extended to the network level absolute clock state space model.

Keywords: clock synchronization; packet loss; synchronization accuracy; model predictive control (MPC); synchronization error

1 引言

无线传感器网络(wireless sensor network, WSN)广泛应用于监控环境、目标跟踪和事件监测等方面,要求由一些已完成时钟同步的节点协作完成。无线通信链路存在时变的信道增益和信道干扰等因素,数据包在无线网络传输时可能发生冲突和传输错误而导致数据包丢失,称为不可靠 WSN^[1-2]。在不可靠 WSN 中完成时钟同步,双向信息观测过程中,含时间信息的多个时钟同步测量值数据包在规定观测周期内无法成功到达,称为对时钟时间状态的不完全量测。实现不可靠 WSN 下的时钟同步,产生的问题是不完全量测引入的随机量测方差将产生附加的时钟状态估计误差^[3-4],由此造成网络级时钟同步误差、收敛性能无法量化评估。

早期时钟同步研究采用 WSN 时间同步协议来估计时钟参数并进行同步调节^[5-6]。在文献[7]中采用统计信号处理观点来分析 WSN 时钟同步问题。一致性算法直接将收集到的邻居节点各状态采取最大或最小等选择策略补偿到节点自身状态^[8-9],但该方法较易受网络规模及节点间状态的影响,算法收敛速度慢,尤其当发生大量丢包时这种情况会更突出。

考虑时钟同步方法在线计算的复杂性对能耗和计算资源的需求,前期研究中,本文已在文献[3, 10]中提出了时钟同步相对时钟状态空间模型,建立了网络控制理论观点下的时钟同步量化建模与分析框架。本文希望在此系统化研究框架下,对模型预测控制(model predictive control, MPC)在时钟同步应用中的复杂度、同步误差及收敛速度各方面做出权衡。一定程度上不站在纯理论讨论的角度(如文献[10]所述时钟同步问题的特殊性),而从 MPC 理论在工业应用可实施方面考虑,降低 MPC 在实际应用中的计算复杂度。Cyber-Physical 环境的时钟同步算法需要更好的收敛稳态误差、自适应于网络规模、量化的时钟同步精度、对丢包有更好的鲁棒性等。

文献[11]在数据通过不可靠网络环境下,对控制和估计问题进行了严格的基础性研究。因此,缘于文献[10-11]的讨论,本文已得出基于网络控制观点的时钟同步框架在 TCP-like 协议下,控制器和估计器设计满足分离原理;文献[12]采用 PI 控制器补偿时钟漂移,但是由于随机的外部干扰和内部扰动的不确定性使得系统的动态性能不佳;本文已在文献[3, 10]量化建模与分析框架中提出采用单步最优控制的时钟同步控制方法。单步最优控制属于局部随机最优控制,采用了终端代价函数为优化目标;Cyber-Physical 环境下,希望进一步提高时钟同步性能,文献[13-14]通过引入名义系统,并采用终端域约束,实现了 Tubes-MPC 的含约束稳态收敛,此控制方

案对于高斯噪声条件进行了适用性简化;文献[15]全面地从鲁棒性和随机模型预测控制研究的重要性方面,指出 MPC 研究需要更充分地考虑工业方面需求,因为这些 MPC 控制形式经常需要在线解决复杂的优化控制问题。在坚实的理论基础上,需要更加关注工业具体应用领域 MPC 的适用性研究,进一步考虑 Tubes 方法的深入扩展,发挥 MPC 在处理终端域约束上的优势。文献[16]通过分布式基于卡尔曼滤波 MPC,对丢失的信息提供优化估计,补偿由于系统多率属性而产生的信息丢失,估计相关联的本地状态。注意到文献[16]所适用的卡尔曼滤波算法自身运用到输出反馈观测的处理噪声边界的复杂性,是适用于分布式模型预测控制(distributed model predictive control, DMPC)的一类重要方法。但是,从 MPC 严格的理论意义而言,这类方法没有从终端域约束上充分发挥 MPC 本质为优化理论的优势^[16]。本文试图将基于卡尔曼滤波的 MPC 方法与重要的 Tubes-MPC 方法结合,应用于时钟同步问题得出有价值的研究探索。

Sinopoli B 等人^[4]在采用丢包即为零的策略下,已经证明存在一个包接收率边界,使得卡尔曼滤波的误差协方差收敛,并给出了这个重要边界值的上下界^[17]。本文在前期研究文献[3]中已得出丢包率和协方差矩阵期望之间的联系,并从能耗角度设计了在满足同步精度需求下的最小丢包率计算方法,具有工业应用的实际价值。

本文的主要贡献:1)从网络控制观点出发,在前期研究文献[5, 14]的基础上,以相对时钟状态空间模型为基础,面向输出反馈模型预测控制方法建立 Tubes-MPC 时钟同步方法;2)以不完全量测下的观测模型为基础,对丢包情况下的时钟同步误差方差进行了统计意义下的方差上界与下界量化分析,并映射为不完全量测下由丢包所引入附加的估计误差约束集;3)以名义系统状态为 Tubes-MPC 控制策略的中心点,采用反馈控制策略和 Set-Theory-in-Control 建立了估计系统与名义系统之间的控制误差正定不变集合,量化分析扰动系统、估计系统和名义系统状态之间的偏差,实现了 Tubes-MPC 时钟同步指数稳定量化收敛性能;4)在求解的丢包方差边界与包接收率的量化关系上,将完全量测情况下的干扰误差集合并运算于由丢包引入的放大的估计误差集合,由此量化不完全量测干扰误差集合,建立了集合约束下的模型预测优化模型,并且鲁棒适应于 Cyber-Physical 网络丢包下 Tubes-MPC 时钟同步指数稳定量化收敛性能。

2 时钟同步状态空间模型

2.1 时钟模型

WSN 中的每个传感器节点拥有自己的时钟,对于时钟读数采用积分模型表示如下:

$$c_i(t) = \int_0^t \beta_i(\tau) d\tau + \theta_i^0 \quad (1)$$

式中： $\beta_i(\tau)$ 为节点 i 时变时钟偏斜， θ_i^0 为节点 i 的初始时钟偏移。

将时钟模型建成积分模型，主要考虑到实际中由于时钟晶振的不完美性及受到环境因素的影响，使得各个节点晶体振荡器的频率发生一定改变。考虑到在短时间内，晶体振荡器的频率变化对 WSN 时钟同步影响非常小，将传感器节点 i 的时钟读数 $c_i(t)$ 采用线性模型表示为^[10]：

$$c_i(t) = \beta_i t + \theta_i \quad (2)$$

式中： β_i 为节点 i 的时钟偏斜， θ_i 为节点 i 的时钟偏移。当 $\beta_i = 1, \theta_i = 0$ 时， $c_i(t) = t$ ，此时节点 i 时钟称为标准时钟。

由于标准时间 t 无法获取，因此，本文建立节点 j 相对于节点 i 的相对时钟为：

$$c_j(t) = \frac{\beta_j}{\beta_i} c_i(t) + \left(\theta_j - \frac{\beta_j}{\beta_i} \theta_i \right) = \beta_{ij} c_i(t) + \theta_{ij} \quad (3)$$

式中： β_{ij} 为节点 j 相对于节点 i 的相对时钟偏斜， θ_{ij} 为节点 j 相对于节点 i 的相对时钟偏移。

2.2 基于双向信息交换机制的观测模型建立

本文采用双向信息交换机制交换相邻两节点时钟信息，如图 1 所示，假设每轮同步周期中节点 i 与节点 j 时钟同步信息交换发生了 N 轮，在第 k 轮信息交换过程中，节点 i 获得的时间戳集为 $\{T_{1,k}, T_{2,k}, T_{3,k}, T_{4,k}\}_{k=1}^N$ ，以上时间戳信息交换过程可被建模为：

$$\begin{cases} T_{2,k} = \beta_{ij}(T_{1,k} + \tau + X_k) + \theta_{ij} \\ T_{3,k} = \beta_{ij}(T_{4,k} - \tau - Y_k) + \theta_{ij} \end{cases} \quad (4)$$

式中：时钟信息在节点 i 与节点 j 信息交换过程中的随机时延分别为 X_k, Y_k, τ 为交换过程中的固定时延。

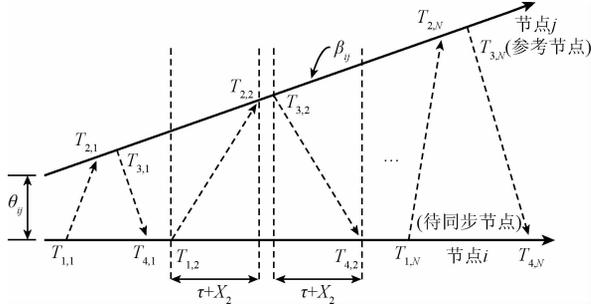


图 1 在参考时间下邻居节点间的时钟信息的交换模型

Fig. 1 The exchange model of clock information between neighbor nodes at reference time

本文做出以下假设：

1) 文献[6]证实了将随机时延建为高斯分布的置信

度为 99.8%。因此，本文假设随机时延 X_k 和 Y_k 服从均值为 0，方差为 σ_v^2 的高斯分布。

2) 假设式(4)中的固定时延 τ 是对称的，这主要基于 3 点：(1) 本文仅考虑邻居节点间交换信息，不存在多跳传输情形；(2) 节点间交换的时间信息的数据包大小和传输速率相同，故两个节点有相同的发射和接收时间；(3) 假设两节点的相对位置在信息交换过程中并未发生改变，故数据在两节点间的传播时间相同^[10]。

3) 在固定时延已知和未知情况下，可采用统计信号处理来估计 β_{ij} ，并且由于 β_{ij} 的慢时变特性，也可采用系统辨识方法^[3]。本文假设 β_{ij} 在当前同步周期中是恒定且已知的，但在不同周期内可以不同，即在第 k 轮同步周期内，令 $\beta_{ij} = \beta_{ij}^k, k = 1, 2, 3, \dots$ ，有 $\beta_{ij}^{k+1} \neq \beta_{ij}^k$ 。

基于上述原因，本文选取 $x = [\tau \ \theta_{ij}]^T$ 为系统状态，根据式(4)得到节点 i 相对于节点 j 的观测等式为：

$$y(k) = Cx(k) + v_k \quad (5)$$

式中： $y(k) = [T_{2,k}/\beta_{ij} - T_{1,k}; T_{4,k} - T_{3,k}/\beta_{ij}]$ ； $v_k = [X_k; Y_k]$ 为零均值高斯分布， $E v_k v_k^T = R \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ ； $C = [1/\beta_{ij}; 1 - 1/\beta_{ij}]$ 。

定义 γ_k 描述第 k 轮信息交换的丢包事件，则当节点间成功交换数据，有 $\gamma_k = 1$ ；否则， $\gamma_k = 0$ 。若考虑所有轮次的信息交换过程，则 γ_k 是一个随机事件，且符合伯努利分布的随机过程。此时，对于伯努利变量 γ_k 在统计意义下有 $p(\gamma_k = 1) = \lambda$ ^[3]，其中 λ 表示包到达概率。将观测模型式(5)修改为：

$$y(k) = Cx(k) + v_k' \quad (6)$$

式中：噪声 v_k' 变成关于 γ_k 的变量，有 $v_k' \sim N(0, \gamma_k R + (1 - \gamma_k) \bar{\sigma}^2 I)$ ，一般令观测信息丢失时的噪声方差 $\bar{\sigma}$ 趋向于无穷。

通过式(4)运算可得标量形式下对于状态 $x = \theta_{ij}$ 的观测等式为：

$$y(k) = Cx(k) + v_k \quad (7)$$

式中： $y(k) = \frac{T_{2,k} + T_{3,k}}{\beta_{ij}} - T_{1,k} - T_{4,k}$ ， $C = \frac{2}{\beta_{ij}}$ ， $v_k = X_k - Y_k$ ， $v_k \sim N(0, 2\sigma_v^2)$ ， $E v_k v_k^T = R \in \mathbf{R}$ 。

类似式(6)对于不完全量测情况下的考虑，将式修改为：

$$y(k) = Cx(k) + v_k' \quad (8)$$

2.3 状态空间模型的建立

本文试图为不可靠 WSN 时钟同步问题建立一种基于估计和控制的理论基础。该方法与网络节点分布和通信方法无关，是一种系统性方法。假设当前状态和前一时刻的状态是线性关系，并且由于其变化缓慢，所以将未知状态建为 Gauss-Markov 动态模型^[10]，并引用现代控制理论思想，产生一个最优控制输入 $u(k)$ ，修正节点 i 逻

辑时钟,此状态变化可抽象为:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{w}_k \quad (9)$$

式中: $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$, \mathbf{B} 为控制权重矩阵, \mathbf{w}_k 中的每一项服从零均值方差为 σ_w 的高斯分布, $E\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^T = \mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 。

由于时钟同步过程最直接相关的量为相对时钟偏移,根据 2.2 节可知,忽略固定时延 τ 是可行的。当选择状态 $x = \theta_{ij}$, 可得标量形式下的状态变化为:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{w}_k \quad (10)$$

式中: $\mathbf{A} = 1$, \mathbf{B} 为 1 阶控制权重矩阵。

至此,本文得到了时钟同步的状态更新方程和观测方程,用如下统一形式描述:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}_k' \end{cases} \quad (11)$$

式(11)分别定义了不同状态下的两种状态空间模型,后续简称状态 $\mathbf{x} = [\tau \ \theta_{ij}]^T$ 时的矢量模型为模型 1, 而状态 $x = \theta_{ij}$ 时的标量模型为模型 2。由于 WSN 的不确定性,不管哪种模型被使用,关键问题是在不完全量测情况下对于状态估计方法和控制策略的选择与设计。

3 不完全量测下卡尔曼滤波同步精度分析

如果观测值丢失过多,将导致卡尔曼滤波过程不稳定。如果时钟参数估计不准确,那么传感器节点的逻辑时钟不会实现同步。考虑存在观测值丢失时,需重新建立卡尔曼滤波估计模型,分析误差协方差的迭代过程,并讨论包接收率 λ 与协方差矩阵期望的收敛性。

根据状态空间模型(11)重新推导卡尔曼滤波等式:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (12)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (13)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k+1) =$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) - \gamma_{k+1}\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{C}\mathbf{P}(k+1|k) \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) =$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \gamma_{k+1}\mathbf{K}_{k+1}[y(k+1) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)] \quad (15)$$

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (16)$$

由式(12)~(16)可知,卡尔曼滤波相关等式并不受所采用模型影响。根据式(13)~(15),可得到验前误差矩阵递推方程为:

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} -$$

$$\gamma_k\mathbf{A}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{A}^T \quad (17)$$

令 $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}(k|k-1)$, 则:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \gamma_k\mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^T \quad (18)$$

\mathbf{P}_k 变成关于 γ_k 的随机变量,这是一个不确定量,因此,本文主要讨论统计意义下 $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\mathbf{P}_k]$ 的收敛性质。

$$E[\mathbf{P}_{k+1}] = \mathbf{A}E[\mathbf{P}_k]\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \lambda E[\mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^T] \quad (19)$$

定理 1 误差协方差期望的边界量化分析^[4]

如果 $(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{1/2})$ 可控, (\mathbf{A}, \mathbf{C}) 可测, $\lambda > \lambda_c$, 则当 $\forall E[\mathbf{P}_0] \geq 0$ 时,有 $0 < \mathbf{S}_k \leq E[\mathbf{P}_k] \leq \mathbf{V}_k, \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{S}_k = \bar{\mathbf{S}}, \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{V}_k = \bar{\mathbf{V}}$, 其中, $\bar{\mathbf{S}}$ 是方程 $\bar{\mathbf{S}} = (1-\lambda)\mathbf{A}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}$ 的解, $\bar{\mathbf{V}}$ 是方程 $\bar{\mathbf{V}} = g_\lambda(\bar{\mathbf{V}})$ 的解, λ_c 为临界包接收率, $\lambda_c \in [0, 1]$, $g_\lambda(\cdot)$ 为一个修改的代数黎卡提等式 $g_\lambda(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \lambda\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{A}^T$ 。

由于 γ_k 的随机性,本文引入关于 \mathbf{P}_k 的期望的收敛特性讨论, $E[\mathbf{P}_k]$ 边界反映了状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}$ 和扰动系统状态 \mathbf{x} 的偏离大小的一个度量,该度量值将包接收率和系统状态建立了联系。本文将利用该种联系设计控制器,以提升控制器对于丢包的鲁棒性,降低同步误差。

4 基于 Tubes 输出反馈模型预测控制方案

4.1 估计和控制误差

在发生丢包的时候,第 3 节获得的统计意义下的协方差上界,反映了扰动系统状态和估计系统状态偏离的最大程度的平均度量,若假设:

$$\varphi(-\sqrt{\mathbf{V}_k}) \leq \mathbf{x}_k(i) - \hat{\mathbf{x}}_k(i) \leq \varphi(\sqrt{\mathbf{V}_k}) \quad \mathbf{x}_k(i) \in \mathbf{X}; \quad \forall i \in N_{N-1} \quad (20)$$

式中: $\varphi(\cdot)$ 为函数映射获得对应输入矩阵左上角和右下角数据组成的列向量。

实际上式(20)并不总是成立,直接讨论这样的不等式成立条件,对于丢包情况下并不能得出一个准确的不等式上下界。在完全量测情况下,这样的上下界可通过最小不变集 mRPI $\bar{\mathbf{S}}$ 来获得^[18], 则在不完全量测情况下有:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(i) \in \tilde{\mathbf{S}}^+ \supseteq \tilde{\mathbf{S}} \quad (21)$$

由第 3 节可知不同丢包率和协方差上界的函数联系,则对于集合 $\tilde{\mathbf{S}}$ 在对应丢包率 $1-\lambda$ 下扩大为 $\tilde{\mathbf{S}}^+$, 有:

$$\tilde{\mathbf{S}}^+ - \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{\Delta} \quad (22)$$

式中: $\mathbf{\Delta} = [\varphi(-\sqrt{\mathbf{V}}), \varphi(\sqrt{\mathbf{V}})]_{1-\lambda} - [\varphi(-\sqrt{\mathbf{V}}), \varphi(\sqrt{\mathbf{V}})]_{\lambda=1}, [\varphi(-\sqrt{\mathbf{V}}), \varphi(\sqrt{\mathbf{V}})]_{1-\lambda}$ 为对应丢包率 $1-\lambda$ 下的边界。

因此,首先讨论完全量测情况下的相关不变集和控制设计具有重要意义,将为本文丢包情况下的控制器设计提供设计基础。完全量测情况下扰动系统的状态空间模型为:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (23)$$

定义扰动系统状态满足集合约束 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, 集合 \mathbf{X} 内部包含目标点 \mathbf{Z} 。对于由时间触发的事件系统, 时间不能由较大的控制量进行任意调整, 这样的调整会使节点的时间倒退到之前运行某个关键服务更早的时间, 导致系统时序错乱。因此, 本文考虑控制量约束到 $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ 。 $\mathbf{u}_s(k) \triangleq \{\mathbf{u}_k(0), \mathbf{u}_k(1), \dots, \mathbf{u}_k(i), \dots, \mathbf{u}_k(N_c-1)\}$ 为当前时刻预测的一组控制序列, $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_k(0)$ 。系统式(33)约束到下述状态和控制集合:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{U} \quad (24)$$

过程噪声 \mathbf{w}_k 和量测噪声 \mathbf{v}_k 均服从正态分布, 则根据概率论过程噪声 \mathbf{w}_k 和量测噪声 \mathbf{v}_k 可分别以概率 p_w 和 p_v 约束到:

$$P\{\mathbf{w}_k \in W\} = p_w, \quad P\{\mathbf{v}_k \in V\} = p_v \quad (25)$$

式中: $P\{\cdot\}$ 表示概率分布函数。在实际过程中, 一般根据 3σ 法则, 过程噪声 \mathbf{w}_k 和量测噪声 \mathbf{v}_k 均以 99.97% 概率约束到:

$$P\{\mathbf{w}_k \in W_{3\sigma}\} = 99.97\%, \quad P\{\mathbf{v}_k \in V_{3\sigma}\} = 99.97\% \quad (26)$$

式中: $W_{3\sigma} = [-3\sigma_w', 3\sigma_w']$, $V_{3\sigma} = [-3\sigma_v', 3\sigma_v']$, σ_w' 和 σ_v' 分别为对应模型下过程噪声和量测噪声方差。

为了保证在建立稳定性约束的前提下, 降低计算复杂度, 本节采用无延迟的 Luenberger 观测器, 类似于卡尔曼滤波观测器的一致表达, 对于估计系统有:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \\ \quad \mathbf{L}[y(k-1) - \hat{\mathbf{y}}(k-1)] \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) \end{cases} \quad (27)$$

式中: $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 为当前 k 时刻观测状态, \mathbf{L} 为观测器增益。

估计误差 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ 的等式为:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k) &= \mathbf{A}_L \tilde{\mathbf{x}}(k-1) + (\mathbf{w}_k - \mathbf{L}\mathbf{v}_{k-1}) \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{aligned} \quad (28)$$

式中: \mathbf{A}_L 需满足 $\rho(\mathbf{A}_L) < 1$, 保证式是稳定的。

为了使扰动系统状态和相关联的控制总是满足约束式(24), 引入第3种动态系统一名义系统。名义系统即将扰动系统中的相关噪声去除, 有:

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k-1) \quad (29)$$

令 $\phi(i; \bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k))$ 为系统式(29)在第 i 个预测步中的状态, 起始状态为 $\bar{\mathbf{x}}(k)$, 并产生一组控制序列 $\bar{\mathbf{u}}_s(k) \triangleq \{\bar{\mathbf{u}}_k(0), \dots, \bar{\mathbf{u}}_k(N_c-1)\}$, $\bar{\mathbf{u}}(k) = \bar{\mathbf{u}}_k(0)$, 对应状态序列 $\bar{\mathbf{x}}_s(k) \triangleq \{\bar{\mathbf{x}}_k(0), \dots, \bar{\mathbf{x}}_k(N_c)\}$, 该序列即是本文将使用的 tubes 控制的中心点。

为了抵消扰动, 本文在模型预测控制器中增加反馈部分, 得到扰动系统的控制器为:

$$\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{u}}(k) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{e}(k) \quad (30)$$

式中: $\mathbf{e}(k) \triangleq \bar{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)$ 为控制误差, $\bar{\mathbf{K}}$ 为控制器增益, $\bar{\mathbf{u}}(k) = \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{x}}(k)$ 为对应的名义系统控制量。

估计系统和名义系统控制误差 $\mathbf{e}(k)$ 的差分等式为:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{A}_K \mathbf{e}(k-1) + [\mathbf{L}\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{L}\mathbf{v}_{k-1}] \quad (31)$$

式中: $\mathbf{A}_K \triangleq \mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}$, 满足 $\rho(\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}) < 1$ 。

观测状态与名义系统状态之间的误差为 $\mathbf{e}(k)$, 真实状态与观测状态之间的误差为 $\tilde{\mathbf{x}}(k)$, 有:

$$\mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{e}(k) + \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (32)$$

定义当一个集合 $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ 满足 $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ 且 $\bar{\Omega} \subset \bar{X}$, 则称该集合 $\bar{\Omega}$ 是系统式(29)状态 \bar{x} 的正定不变集合^[18]。

引理1: 状态估计误差集合^[14] 对于估计误差式(28)存在这样一个正定不变集合 \bar{S} , 若扰动系统和估计系统初始状态满足 $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0) \in \bar{S}$, 则对 $\forall \mathbf{w}_k \in W, \forall \mathbf{v}_k \in V$ 有 $\tilde{\mathbf{x}}(k) \in \bar{S}$, 即 $\mathbf{x}(k) \in \hat{\mathbf{x}}(k) \oplus \bar{S}$ 。

对于估计误差集合 \bar{S} 求解, 实际过程中并不能获得精确的计算方式, 文献[18]讨论了近似求解 \bar{S} 的迭代方法。

引理2: 控制误差集合^[14] 对于控制误差式(31)存在这样一个正定不变集合 \bar{S} , 若估计系统和名义系统初始状态满足 $\mathbf{e}(0) = \bar{\mathbf{x}}(0) - \bar{\mathbf{x}}(0) \in \bar{S}$, 则对 $\forall \mathbf{w}_k \in W, \forall \mathbf{v}_k \in V$ 有 $\mathbf{e}(k) \in \bar{S}$, 即 $\bar{\mathbf{x}}(k) \in \bar{\mathbf{x}}(k) \oplus \bar{S}$ 。

引理3: 干扰误差集合^[14] 定义干扰误差集合 $\mathbf{S} = \bar{S} \oplus \bar{S}$, 若初始误差 $\tilde{\mathbf{x}}(0) \in \bar{S}$ 且 $\mathbf{e}(0) \in \bar{S}$, 则在控制 $\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{u}}(k) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{e}(k)$ 下, 有 $\mathbf{x}(k) \in \hat{\mathbf{x}}(k) \oplus \bar{S} \subset \bar{\mathbf{x}}(k) \oplus \mathbf{S}$ 。

集合 \bar{S} 量化了在每一步的控制过程中由于系统噪声导致估计系统和扰动系统状态之间的偏差。集合 \bar{S} 则建立了估计系统和名义系统状态间的集合约束关系。

4.2 控制器设计

在传统的 MPC 中, 直接解决扰动系统控制问题, 控制并不能完全克服噪声扰动。考虑抽象的名义系统并不存在噪声, 通过基于名义系统反馈控制来作用于扰动系统, 便可提前预测对于扰动系统的控制性能。为保证求解名义系统的控制对于扰动系统是可行的, 需要对状态和控制量做出一些额外约束。

令 $\bar{\mathbf{x}}_s(i) = \bar{\mathbf{x}}(k+i)$, 则名义系统的控制求解问题 $P_{N_c}[\bar{\mathbf{x}}(k)]$ 的目标函数为:

$$V_{N_c}(\bar{\mathbf{x}}_s(k), \bar{\mathbf{u}}_s(k)) \triangleq \sum_{i=0}^{N_c-1} \ell(\bar{\mathbf{x}}_s(k+i), \bar{\mathbf{u}}_s(k+i)) + V_f(\bar{\mathbf{x}}_s(k+N_c)) \quad (33)$$

式中: N_c 是预测域步长; $V_f(\cdot)$ 为终端代价函数, $\ell(\cdot)$ 为阶段代价函数。定义为 $\ell(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = (1/2)[(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{Z})^T \mathbf{Q}_\ell(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{Z}) + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_\ell \mathbf{u}]$, $V_f(\bar{\mathbf{x}}) = (1/2)(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{Z})^T \mathbf{P}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{Z})$ 。其中, \mathbf{Z} 为系统控制目标, \mathbf{Q}_ℓ , \mathbf{R}_ℓ 和 \mathbf{P} 可被假设为正定矩阵, \mathbf{P} 为无约束下系统线性二次型调节器 (linear

quadratic regulator, LQR) 中离散时间黎卡提方程 $P(k) = Q + A^T [P^{-1}(k+1) + BR^{-1}B^T]^{-1}A$ 的解, u 采用反馈控制形式, 即 $u = \bar{K}x$, 满足 $\rho(A + B\bar{K}) < 1$ 。

名义系统的状态 \bar{x} 和控制 \bar{u} 约束到下述缩减集合为:

$$(\bar{x}, \bar{u}) \in \bar{X} \times \bar{U}, \bar{X} \triangleq X - S, \bar{U} \triangleq U - KS \quad (34)$$

为保证输出模型预测控制的稳定性, 若采用无限时域, 即使采用工程意义上的足够大时域, 也会使 MPC 因实时性差而无法应用。在优化问题中加入等式约束 $\hat{x}_k(N_c) = Z$, 这样的约束将使优化问题只在很小的范围内有解。本文采用终端不等式约束扩大搜索范围, 保证系统稳定性, 定义系统终端状态 $\hat{x}_k(N_c)$ 满足:

$$\bar{x}_k(N_c) \in X_f \quad (35)$$

式中: X_f 为系统终端约束集, 目标平衡点 Z 为其内点。区别于调节器问题的稳定性条件^[14], 其中终端代价函数 $V_f(\cdot)$ 终端约束集 X_f 和满足:

$$A_{\bar{K}}X_f + Bc \subset X_f, X_f \subset X, \bar{K}X_f + c \subset U \quad (36)$$

$$V_f(A_{\bar{K}}\hat{x} + Bc) + \ell(\hat{x}, \bar{K}\hat{x} + c) \leq V_f(\hat{x}), \forall \hat{x} \in X_f \quad (37)$$

式中: $A_{\bar{K}} = A + B\bar{K}, c$ 为控制常量。

根据式 ~, 则当给定名义系统状态 $\bar{x}(k)$, 将计算出这样一组控制序列 $u_s(k)$:

$$\tilde{u}_N(\bar{x}(k)) = \{\bar{u}_s(k) \mid \bar{u}_s(i) \in \bar{U}, \bar{x}_k(i) \in \bar{X}, \forall i \in N_{N-1}, \bar{\phi}(N_c; \bar{x}(k), \bar{u}(k)) \in X_f\} \quad (38)$$

式中: $N_{N-1} \triangleq \{0, 1, \dots, N_c - 1\}$ 。

函数 $V_N(\bar{x}_s(k), \bar{u}_s(k))$ 的定义域 \bar{X}_N 可被定义为: $\bar{X}_N = \{\bar{x} \mid \tilde{u}_N(\bar{x}(k)) \neq \phi\}$ 。

至此, 本文已获得解决名义系统的最优控制求解问题 $P_N[\bar{x}(k)]$ 的所有条件及其表达, 对于估计系统的最优控制求解问题 $P_N[\hat{x}(k)]$ 表达如下:

$$V_N^*(\hat{x}(k)) \triangleq \min_{\bar{x}_s, \bar{u}_s} \{V_N(\bar{x}_s(k), \bar{u}_s(k)) \mid \bar{u}(k) \in \tilde{u}_N(\hat{x}(k)), \bar{x}(k) \in \bar{x}(k) \oplus \bar{S}\} \quad (39)$$

$$(\bar{x}^*(\hat{x}(k)), \bar{u}^*(\hat{x}(k))) = \arg \min_{\bar{x}_s, \bar{u}_s} \{V_N(\bar{x}_s(k), \bar{u}_s(k)) \mid \bar{u}(k) \in \tilde{u}_N(\bar{x}(k)), \bar{x}(k) \in \bar{x}(k) \oplus \bar{S}\} \quad (40)$$

解决最优控制问题 $P_N[\hat{x}(k)]$, 将产生一组最优控制序列 $\bar{u}_s^*(\hat{x}(k)) \triangleq \{\bar{u}^*(\hat{x}(k), 0), \dots, \bar{u}^*(\hat{x}(k), N_c - 1)\}$,

$\bar{u}^*(k) \triangleq \bar{u}^*(\hat{x}(k), 0)$ 为名义系统控制量, 同时获得一组最优状态序列 $\bar{x}_s^*(\hat{x}(k)) \triangleq \{\bar{x}^*(\hat{x}(k), 0), \dots, \bar{x}^*(\hat{x}(k), N_c)\}$, $\bar{x}^*(k) = \bar{x}^*(\hat{x}(k), 0) = \bar{x}^*(\hat{x}(k))$ 为优化后名义系统状态。

由式可知, 在不完全量测情况下有 $\bar{S}^+ = \bar{S} \oplus \Delta$, 替换约束中的 \bar{S} , 干扰误差集合 S 并运算于由丢包所引入的附加的估计误差集合可得集合 S^+ 。

定理 2: 时钟同步指数收敛量化分析

若初始控制误差 $e(0) \in \bar{S}$, 估计误差 $\hat{x}(0) \in \bar{S}^+$, 则解决最优控制问题 $P_N[\hat{x}(k)]$, 对扰动系统和估计系统运用控制策略 $u^*(k)$, 而对名义系统运用控制策略 $\bar{u}^*(k)$, 名义系统能够指数收敛到目标 Z , 估计系统和扰动系统分别指数收敛到集合 $\bar{S} \oplus Z$ 和 $S^+ \oplus Z$ 。

证明: 根据 $V_N(\cdot)$ 和 $V_N^*(\cdot)$ 定义, 若当 $\bar{x}_i(k) = \bar{x}_i^*(\hat{x}_i(k))$, 则有 $V_N(\bar{x}_i^*(\hat{x}_i(k))) = V_N^*(\hat{x}_i(k))$ 。假设 $V_N^*(\hat{x}(k))$ 满足^[13] $V_N^*(\hat{x}(k)) = V_N^0(\bar{x}^*(\hat{x}(k))) \geq c_1 \|\bar{x}^*(\hat{x}(k)) - Z\|^2, \forall \hat{x}(k) \in X_N; V_N^*(\hat{x}(k)) = V_N(\bar{x}^*(\hat{x}(k))) \leq c_2 \|\bar{x}^*(\hat{x}(k)) - Z\|^2, \forall \hat{x}(k) \in X_f \oplus \bar{S}; V_N^*(\hat{x}(k+1)) - V_N^*(\hat{x}(k)) \leq -c_1 \|\bar{x}^*(\hat{x}(k)) - Z\|^2, \forall \hat{x}(k) \in X_N$ 。

令 $c = 1 - c_1/c_2$, 且 $\|\bar{x}_i^*(\hat{x}_i(k)) - Z\|^2 \leq 1/c_1 V_N^*(\hat{x}_i(k))$, 则: $\|\bar{x}^*(\hat{x}(k)) - Z\|^2 \leq 1/c_1 V_N^*(\hat{x}(k)) \leq \dots \leq c_2/c_1 c^k \|\bar{x}^*(\hat{x}(0)) - Z\|^2$ 。

至此, 可得 $\|\bar{x}^*(\hat{x}(k)) - Z\| \leq \tilde{c} \delta^k \|\bar{x}^*(\hat{x}(0)) - Z\|$, 其中 $\tilde{c} = \sqrt{c_2/c_1}, \delta = \sqrt{c}, c = 1 - c_1/c_2 \in (0, 1)$ 。名义系统指数收敛到目标平衡点 Z , 由引理 2, 3 和 4, 有估计系统状态 $\hat{x}(k) \in \bar{x}(k) \oplus \bar{S} = Z \oplus \bar{S}$, 扰动系统状态 $x(k) \in \bar{x}(k) \oplus \bar{S} \oplus \bar{S} = Z \oplus S$ 。证毕。

卡尔曼滤波拥有接近于 CRLB 的收敛性能, 比 Luenberger 观测器拥有更小的估计误差。对于采用卡尔曼滤波增益计算的状态估计误差集合 \bar{S}' , 满足 $\bar{S}' \subseteq \bar{S}$ 。因此, 对于由卡尔曼滤波获取的状态 $\hat{x}(k|k)$ 也满足根据静态增益 L 计算的集合约束, 保证了最优控制问题 $P_N[\hat{x}(k|k)]$ 的可行性, 算法步骤如表 1 所示。

表 1 基于 Tubes 的模型预测控制算法

Table 1 Model predictive control algorithm based on tubes

针对 WSN 中的任一节点 i	
1	初始化参数: 初始化时钟估计值 $\hat{x}(0 0)$ 、误差协方差阵 $P(0 0)$ 和初始控制 $u(0 0)$;
	设置 $\hat{x}(0) \in x(0) \oplus (-\bar{S}), \bar{x}(0) = \hat{x}(0 0)$;
2	for $k=1, 2, \dots$ do
3	运行卡尔曼滤波获得最优参数估计 $\hat{x}(k k)$;
4	解决最优控制问题 $P_N(\hat{x}(k k))$ 获得当前名义控制 $\bar{u}_i^*(k)$ 和扰动系统控制 $u^*(k) = \bar{u}^*(k) + K(\hat{x}(k k) - \bar{x}^*(k))$;
5	对正在被控制的扰动系统和估计系统采用控制 $u^*(k)$;
6	end for

5 仿真与性能评估

本节第4节算法简称为 Tubes-MPC。关于本节提到的协议补偿,根据无线传感器网络时间同步协议(timing-sync protocol for sensor networks, TPSN)经典时钟同步协议的思想,主要是通过估计值直接补偿节点时钟^[5]。

本文考虑高精度时钟同步,对于模型2,扰动系统状态初始值 $x(0) = 0.012$, 状态估计初始值 $\hat{x}(0) = 0.02$ 。初始协方差为 $P(0) = E[(x(0) - \hat{x}(0))(x(0) - \hat{x}(0))^T]$, 控制权重 $B = 1$ 。过程噪声 w_k 和量测噪声 v_k 的协方差分别为 $Q = 10^{-5}$, $R = 1.8 \times 10^{-3}$ 。时钟同步目标 $Z = 0$, 表示节点间的相对时钟偏移为零,即节点间达到时钟同步。观测矩阵 $C = 1$ 。对于本文所提出的模型预测控制算法,选择 $Q_\ell = 1, R_\ell = 0.5$, 预测域 $N_c = 1$, 状态约束到 $X = \{x \in R^1 \mid x \in [-0.1, 0.1]\}$, 控制约束到 $U = \{u \in R \mid |u| \leq 0.012\}$ 。控制增益 \bar{K} 和终端惩罚矩阵在本文参数下有 $\bar{K} = 1, P = 1$ 。

5.1 不同包接收率下同步精度分析

对于模型2, A 的特征值为1,由文献[3]可知,即使观测值全部丢失,卡尔曼滤波依旧稳定,但是由于观测值完全丢失,导致时钟同步精度低。图2所示为包接收率 λ 与 $\text{Tr}\bar{V}$ 和 $\text{Tr}\bar{S}$ 之间的关系,当 $\lambda = 0.01$ 时 $\text{Tr}\bar{V}$ 和 $\text{Tr}\bar{S}$ 收敛到 10^5 ,实际上这是一个比 10^5 更大的数,则此时需要分析当前系统同步精度是否满足应用要求,若不满足,即认定时钟同步不稳定。随着包接收率 λ 逐渐增大,上界 \bar{V} 和下界 \bar{S} 的迹逐渐减小,说明 $g_\lambda(\bar{S})$ 和 $g_\lambda(\bar{V})$ 是关于 λ 的单调递减函数。当包接收率 λ 从0.01逐渐过渡到1, $\text{Tr}\bar{V}$ 下降了1个量级,而 $\text{Tr}\bar{S}$ 下降了近2个量级,表明时钟信息包接收率的大小影响时钟同步精度,并且待同步节点收到的时钟信息越多,时钟同步精度也越高。本文利用上界 V_k 作为输出反馈模型预测控制的约束条件。

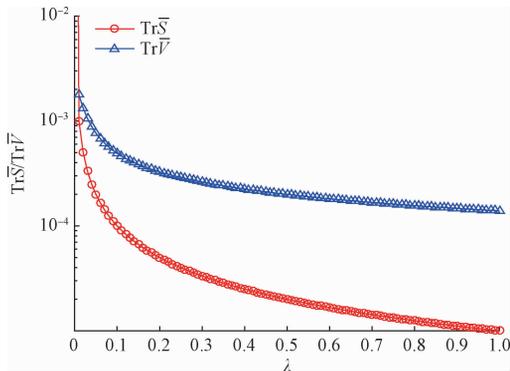


图2 不同包接收率下协方差上界与下界渐近收敛值
Fig.2 The asymptotic convergence values of covariance upper and lower boundaries for different packet arrival rates

5.2 同步误差对比

时钟同步误差一般通过时钟参数的误差衡量,这是衡量时钟同步性能的一个非常显著并且重要的指标。定义第 k 个同步周期的时钟同步误差为:

$$E(k) = \frac{1}{M} [\xi_i(k) - z_i] \quad (41)$$

式中: M 为实验次数, ξ_i 表示状态 x 中第 i 个状态量, z_i 则表示目标 Z 中第 i 个目标量。

图3所示为采用模型2在完全量测情况下,协议补偿、单步最优控制和本文基于输出反馈模型预测控制的两种同步算法的同步误差对比情况。实验中单步最优控制的参数设置为 $B = 1, D = 4$ 。每轮时钟同步执行80次双向时钟信息交换,共执行 $M = 10$ 次实验。

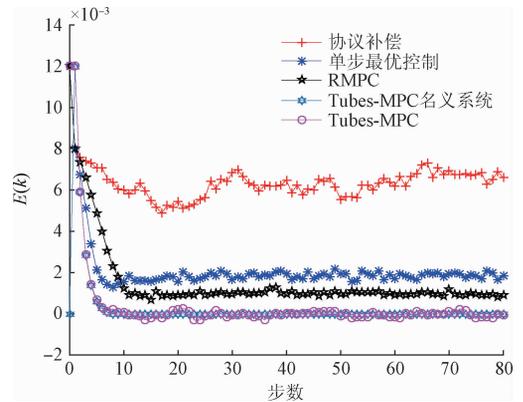


图3 不同算法下同步误差对比
Fig.3 Synchronization error comparison for different algorithms

对比文献[19]中实验结果,从图3中可知协议补偿的同步误差在 6×10^{-3} 上下波动,验证了对比算法本身的正确性,协议补偿未能考虑频率偏移因素^[20],较输出反馈模型预测控制和单步最优控制的同步误差大。由于 Tubes-MPC 实现了指数收敛,从图3可知在第10步时 Tubes-MPC 达到了稳态,且此后继续保持在0附近波动。由于名义系统并无噪声影响, Tubes-MPC 名义系统在第9步收敛到0,且此后一直保持0值不变,符合本文指数收敛量化分析的结果。因此,本文 Tubes-MPC 实现了更快收敛,且具有更低的同步稳态误差。

为了体现 Tubes-MPC 指数收敛对于矢量系统的有效性,图4所示为采用模型1运行 Tubes-MPC。初始协方差仍按照上述方式计算, $C = [1 \ 1; 1 \ -1]$, 控制权重 $B = I_{2 \times 2}$, 控制增益 $\bar{K} = -[1 \ 0; 0 \ 1]$, 对于其他参数按照模型2参数乘上 $I_{2 \times 2}$ 扩维。图4可反映 Tubes-MPC 对不同状态初值的依赖关系。图4(a)和(b)分别采用了不同的状态初值,但都具有相同的控制目标 $Z = [1; 0]$, 和相同的状态估计初始值 $\hat{x}(0) = [1; 0]$ 。虽然扰动系

统状态初始值和估计值具有较大的偏差,但在第9步以后均能指数收敛到目标值附近。从图4可看出状态未能准确到达目标值上,保持在一定范围内波动,一方面是由于噪声影响,另一方面在图4中主要考虑 Tubes-MPC 对于状态初始值的依赖性,按照本文指数收敛分析的结果,只要状态收敛到集合 S 内即可。因此,在 Tubes-MPC 控制下,时钟状态对状态初始值没有依赖关系。为了更直观反映系统状态能够指数稳定在集合 S 内,如图5所示,选择 $x(0) = [-3; -8]$ 、 $Z = [0; 0]$,在稳定后的每个状态均满足集合 S 的约束。该集合 S 量化了被控扰动系统达到稳态后的波动范围。

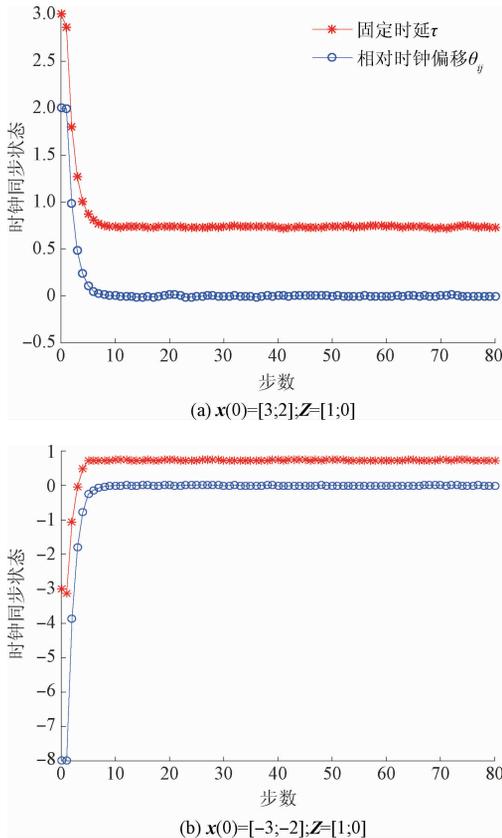


图4 不同初始点及目标下的同步状态
Fig.4 Synchronization status for different initial points and targets

本文设计了对丢包具有一定鲁棒性的控制器,为了体现本文的控制算法对不同包接收率情况下控制的有效性,采用时钟同步误差收敛均值来评价^[2,10],有:

$$\bar{\theta}_\lambda = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{\theta}_i \quad (42)$$

式中: $\bar{\theta}_i = \frac{1}{N-l+1} \sum_{k=l}^N \theta_k$, N 表示在一轮同步过程中时钟信息交换次数, l 表示在该轮同步周期中 θ_k 在第 l 步后达到收敛范围 δ 以内波动,本文取 $\delta = \pm 4 \times 10^{-4}$ 。

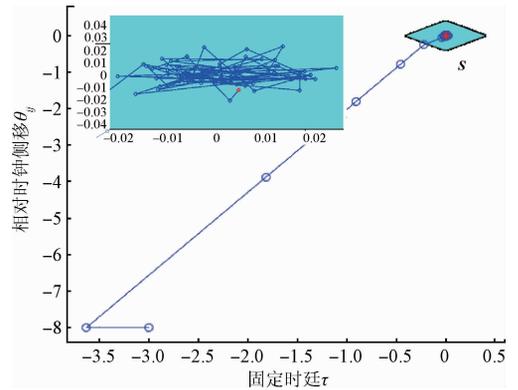


图5 扰动系统状态指数收敛到集合 S
Fig.5 The disturbance system status exponentially converges to the set S

为模拟丢包情况,本文选取包接收率 λ 的步长为 0.01,在实验前按照包接收率离线随机生成节点丢包序列,按照二进制进行编码。此种方式简化了丢包的发生过程,节点按完全量测情况下进行正常信息交换,在对应丢包序列为 0 时,则不处理该数据包^[1]。

图6实验取 $M = 100, N = 80$,采用模型2。从图6中可看到随着包接收率逐渐增大,3种算法收敛均值逐渐降低。3种算法下输出模型预测控制都能较其他两种算法有更低的同步误差收敛均值。在包接收率大于 0.6 以后基本能达到和 $\lambda = 1$ 同样的收敛均值,表示本文的输出反馈模型预测控制能够在 $\lambda \geq 0.6$ 不完全量测情况下仍能够有接近于包接收率 $\lambda = 1$ 时的控制性能,对于丢包具有较强的鲁棒性。

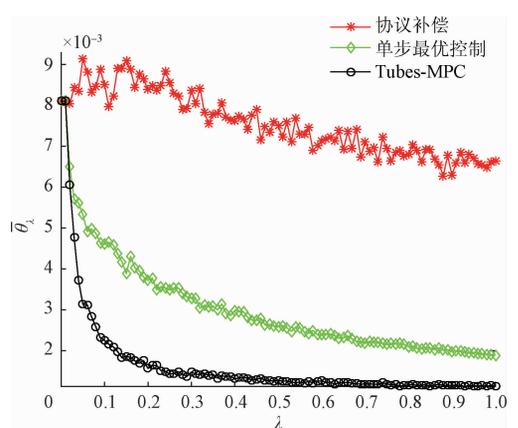


图6 不同包接收率下时钟同步误差收敛均值对比
Fig.6 Convergence mean comparison of synchronization error for different packet arrival rates

在每一次关于 $\bar{\theta}_\lambda$ 的实验过程中,为体现本文控制的稳定性,即不会使 θ_k 发生大范围波动,将图6中 $\bar{\theta}_{\lambda=0.6}$ 数据展开,得到当包接收率 $\lambda = 0.6$ 时的收敛均值 $\bar{\theta}_i$,如图

7所示。从图7中可直观地看出,协议补偿的 $\bar{\theta}_i$ 波动较为剧烈,单步最优控制的 $\bar{\theta}_i$ 波动次之,而在本文的控制算法下 $\bar{\theta}_i$ 波动相对较小,说明本文 Tubes - MPC 能较好的适应丢包情况,不至于使状态变化的过于剧烈。

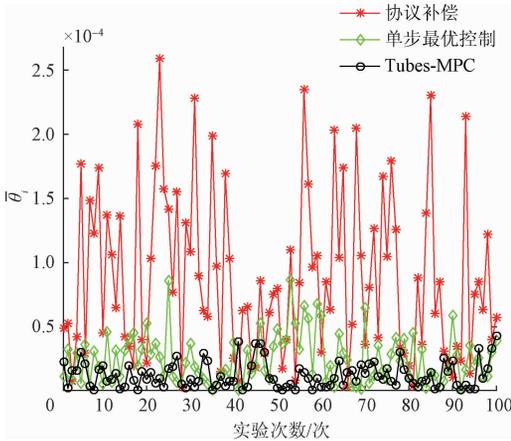


图7 $\lambda = 0.6$ 时钟同步误差收敛均值对比

Fig.7 Convergence mean comparison of synchronization error when $\lambda = 0.6$

6 实验测试与分析

利用实验室开发的节点设备搭建实验验证平台,如图8所示,该节点配置了 STM32F103RB 处理器和 Chipcon 无线射频芯片 CC2430。对 TimerA 配置使用 32 MHz 晶振的 4 分频作为时钟源,分辨率为 $1 \mu s$ 。节点在读硬件时钟时,CC2430 会在节点发送或接受数据包的第一个字节时产生中断(start frame delimiter,SFD),为本文信息交换提供硬件基础。



图8 传感器节点与抓包器

Fig.8 Sensor node and packet capture device

实验平台由3个节点和1台上位机组成,如图9所示。抓包器配有USB接口可直接连接上位机,双向信息交换过程中的所有信息都由该设备进行捕获,并传递给上位机进行数据分析,截取数据包主要采用Ethereal可

视化分组捕获工具。同步算法运行完成后,调整节点逻辑时钟,该逻辑时钟由底层服务函数来维护。



图9 实验平台

Fig.9 Experiment platform

为了验证算法对实际网络的长期同步效果,在图8平台下,每隔6h进行一轮时钟同步,每轮同步执行80次双向时钟信息交换,每次交换时间间隔1s,微处理器此期间可执行 2.77×10^5 条指令(按1条指令=3个机器周期),保证时钟同步算法运行完成。抓包器每隔5s统计上传一次。该网络20d的同步误差收敛均值分布如图10所示,其统计结果如表2所示,越小的标准差表示时钟同步误差收敛均值的波动越小,标准差定义为:

$$D(\bar{\theta}_i) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [\bar{\theta}_i - E(\bar{\theta}_i)][\bar{\theta}_i - E(\bar{\theta}_i)]} \quad (43)$$

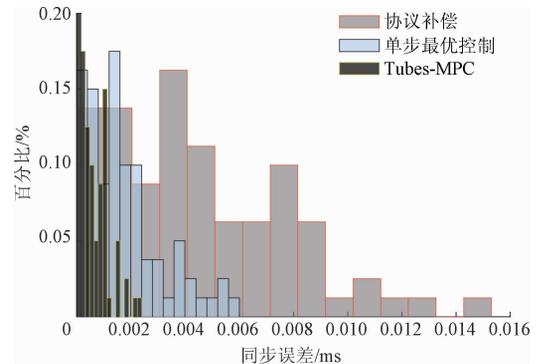


图10 在实验平台下20d同步误差收敛均值分布

Fig.10 Synchronization error convergence mean distribution on experiment platform in 20 days

从表2可以量化地看出,Tubes-MPC的时钟同步误差收敛均值的标准差比协议补偿和单步最优控制的时钟同步误差收敛均值的标准差小,波动范围主要集中在区域 $[0,0.002]$ 。该项实验具有两方面的实际意义:1)反映网络长期时钟同步的效果,能够具有较低的时钟波动和较低的同步误差,保证平台运行稳定性;2)反映本文算法具有较好的同步维持性,可以减少用于同步的网络数据包交换,降低网络通信负荷。

表2 三种算法同步误差收敛均值统计结果比较

Table 2 Comparison of synchronization error convergence mean statistical result for three algorithms (μs)

算法	均值	标准差	最大值	最小值
协议补偿	4.61	3.31	15.26	0
单步最优控制	1.78	1.45	5.95	0
Tubes-MPC	0.69	0.58	2.32	0

7 结 论

本文基于相对时钟状态空间模型,建立了基于输出反馈模型预测控制的时钟同步系统化分析方法,以不完全量测下的观测模型为基础,对丢包情况下的同步误差协方差进行了统计意义下的方差边界定量分析,设计了 Tubes-MPC 时钟同步算法。本文从小规模节点拓扑出发,通过仿真实验,验证输出反馈 Tubes-MPC 时钟同步误差控制的适用性,具有指数收敛性能。对于多节点的工业物联网,利用本文思路设计 Tubes-MPC 算法,以实现不可靠 WSN 时钟同步的鲁棒性控制,本文方法具有较强的理论研究和实际运用价值。

参考文献

- [1] EPSTEIN M, SHI L, TIWARI A, et al. Probabilistic performance of state estimation across a lossy network[J]. *Automatica*, 2008, 44(12):3046-3053.
- [2] 王岩, 王夏静, 刘翔宇. 基于卡尔曼一致性滤波的 WSN 丢包补偿算法[J]. *仪器仪表学报*, 2013, 34(11):2585-2591.
WANG Y, WANG X, LIU X Y. Consensus-based Kalman filtering algorithm based on compensation strategy for wireless sensor network [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2013, 34(11):2585-2591.
- [3] WANG T, GUO D, CAI C Y, et al. Clock synchronization in wireless sensor networks: Analysis and design of error precision based on lossy networked control perspective[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015(2):1-17.
- [4] SINOPOLI B, SCHENATO L, FRANCESCHETTI M, et al. Kalman filtering with intermittent observations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9):1453-1464.
- [5] GANERIWALS, KUMAR R, SRIVASTAVA M B. Timing-sync protocol for sensor networks [C]. *International Conference on Embedded Networked Sensor Systems*, 2004:138-149.
- [6] ELSON J, GIROD L, ESTRIN D. Fine-grained network time synchronization using reference broadcasts[J]. *Acm Sigops Operating Systems Review*, 2002, 36(SI):147-163.
- [7] WU Y C, CHAUDHARI Q, SERPEDIN E. Clock synchronization of wireless sensor networks [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2011, 28(1):124-138.
- [8] 金彦亮, 邓伟, 方昌立. 基于群一致性的大规模无线传感网时间同步[J]. *电子测量技术*, 2016, 39(7):160-164.
JIN Y L, DENG W, FANG CH L. Distributed synchronization in large-scale wireless sensor networks using group consensus protocol [J]. *Electronic Measurement Technology*, 2016, 39(7):160-164.
- [9] 黄友锐, 陈珍萍, 李德权, 等. 无线传感器网络二阶一致性时间同步[J]. *电子与信息学报*, 2017, 39(1):51-57.
HUANG Y R, CHEN ZH P, LI D Q, et al. Second-order consensus time synchronization for wireless sensor networks [J]. *Journal of Electronic & Information Technology*, 2017, 39(1):51-57.
- [10] WANG T, CAI C Y, GUO D, et al. Clock synchronization in wireless sensor networks: A new model and analysis approach based on networked control perspective[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014(1):1-19.
- [11] SCHENATO L, SINOPOLI B, FRANCESCHETTI M, et al. Foundations of control and estimation over lossy networks [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1):163-187.
- [12] BERGER A, PICHLER M, KLINGLMAYR J, et al. Low-complex synchronization algorithms for embedded wireless sensor networks [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement*, 2015, 64(4):1032-1042.
- [13] MAYNE D Q, SERON M M, RAKOVIC S V. Robust model predictive control of constrained linear system with bounded disturbances[J]. *Automatica*, 2005, 41(2):219-224.
- [14] MAYNE D Q, RAKOVIC S V, FINDEISEN R. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems [J]. *Automatica*, 2006, 42(7):1217-1222.
- [15] MAYNE D. Robust and stochastic model predictive control: Are we going in the right direction [J]. *Ifac Papersonline*, 2015, 48(23):1-8.
- [16] ROSHANY Y S, CYCHOWSKI M, NEGENBORN R R, et al. Kalman filter-based distributed predictive control of large-scale multi-rate systems: Application to power networks [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21(1):27-39.
- [17] SHI L, XIE L, MURRAY R M. Kalman filtering over a packet-delaying network: A probabilistic approach [J]. *Automatica*, 2010, 55(3):594-604.

- [18] ILYAK, GILBERT E G. Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 1998, 4(4):317-367.
- [19] 汪付强, 曾鹏, 于海斌. 一种低开销的双向时间同步算法[J]. *仪器仪表学报*, 2011, 32(6):1357-1363.
WANG F Q, ZENG P, YU H B. Low overhead two-way time synchronization algorithm[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2011, 32(6):1357-1363.
- [20] 孙毅, 曾璐琨, 武昕, 等. 基于频偏估计的无线传感器网络时间同步算法[J]. *通信学报*, 2015, 36(9):26-33.
SUN Y, ZENG L K, WU X, et al. Timing synchronization algorithm based on clock skew estimation for WSN[J]. *Journal of Communications*, 2015, 36(9):26-33.

作者简介



王颀(通讯作者), 分别在2000年、2003年和2006年于西南交通大学获得学士学位、硕士学位和博士学位, 现为重庆邮电大学教授, 主要研究方向为物联网理论与应用、网络化控制理论与应用。

E-mail:wangting@cqupt.edu.cn

Wang Ting (Corresponding author) received his B.Sc., M.Sc. and Ph.D. degrees all from Southwest Jiaotong University in 2000, 2003 and 2006, respectively. Now he is a professor in Chongqing University of Post and Telecommunication. His main research interest includes theory and application of internet of things and theory and application of networked control.



万羊所, 2013年于合肥学院获得学士学位, 现为重庆邮电大学硕士研究生, 主要研究方向为物联网理论与应用、网络化控制理论与应用。

E-mail:974896411@163.com

Wan Yangsuo received his B.Sc. degree from Hefei University in 2013. Now he is pursuing his M.Sc. degree in Chongqing University of Post and Telecommunication. His main research interest includes theory and application of internet of things and theory and application of networked control.