

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2416144

# 隐藏吸引子的新四维超混沌系统及多通道同步\*

杨阳 张俊芳 万怡华

(宁夏师范大学物理与电子信息工程学院 固原 756000)

**摘要:** 针对混沌多通道同步效率低的问题,基于经典 Lorenz 混沌系统提出了一种新四维超混沌系统,并通过详细分析其混沌特性,探讨其在保密通信中的应用潜力。首先,通过相图、Lyapunov 指数谱、分岔图、Poincare 截面图和复杂度等方法对其动力学行为进行了分析。其次,通过 Multisim 电路仿真验证了系统的数值分析结果。最后,采用错位投影法设计了一种多通道同步控制方案。研究表明,新四维超混沌系统具有复杂的动力学行为,在不同的初始条件下能够产生隐藏吸引子。电路仿真结果与数值分析相吻合,多通道误差系统具有良好的混沌特性。证明了该系统具有较高的可靠性和灵活性,为研究混沌系统在信息安全领域奠定了良好的基础。

**关键词:** 超混沌系统;隐藏共存吸引子;电路仿真;多通道错位投影

**中图分类号:** O415.5;TN918 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 120.10,510.10

## New four-dimensional chaotic system with hidden attractor and multi-channel synchronization

Yang Yang Zhang Junfang Wan Yihua

(School of Physics and Electronic Information Engineering, Ningxia Normal University, Guyuan 756000, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of low synchronization efficiency in chaotic multi-channel communication, a new four-dimensional super-chaotic system based on the classical Lorenz chaotic system was proposed, and its potential application in secure communication was explored by analyzing its chaotic characteristics in detail. First, the dynamical behavior was analyzed by phase diagram, Lyapunov exponent spectrum, bifurcation diagram, Poincare section diagram, and complexity method. Then, the numerical analysis results were verified by Multisim circuit simulation. Finally, a multi-channel synchronization control scheme was designed using the displacement projection method. The research results show that the new four-dimensional super-chaotic system has complex dynamic behavior and can generate hidden attractors under different initial conditions. The circuit simulation results are consistent with the numerical analysis, and the multi-channel error system has good chaotic characteristics. This indicates that the system has high reliability and flexibility, laying a good foundation for studying chaotic systems in the field of information security.

**Keywords:** chaotic system; coexisting attractor; circuit simulation; multi-channel dislocation projection

## 0 引言

自1963年Lorenz混沌系统的提出以来,混沌的研究迅速发展,并在科学技术<sup>[1-2]</sup>、信息处理<sup>[3-5]</sup>等领域得到广泛应用。研究人员对不同结构类型的混沌系统进行了深入探索。一般而言,具有唯一平衡点的混沌系统的吸引子被定义为隐藏吸引子<sup>[6]</sup>,而具有隐藏吸引子的混沌系统则表现出更复杂的混沌特性。Li等<sup>[7]</sup>通过引入非易失性忆阻器,

耦合两个复值激光系统,提出了一种无平衡点的多涡卷隐藏吸引子的忆阻复值激光系统。Yang等<sup>[8]</sup>将一维映射与离散忆阻器相耦合,构建了一种能够产生自激和隐藏混沌吸引子的忆阻超混沌系统。Tamba等<sup>[9]</sup>研究了基于磁通控制忆阻器的四维无平衡点混沌系统的动力学分析及其在图像加密中的应用,该系统经历了丰富复杂的动力学过程,如共存的隐藏吸引子、隐藏的极端多稳态、偏移提升动力学和反单调特性等。共存吸引子是当前混沌系统研究的热点

收稿日期:2024-05-30

\* 基金项目:国家自然科学基金(42371377)、宁夏自然科学基金(2022AAC03320)、宁夏师范学院校级科研项目(XJYB2330)、宁夏师范学院本科教学项目(NJYJSTY2406)资助

之一,文献[10]提出通过正弦项变换,得到了一个具有无限共存类吸引子的保守三维混沌系统。李得洋等<sup>[11]</sup>利用线性矩阵不等式方法对系统的共存吸引子进行了识别迁移控制。全旭等<sup>[12]</sup>提出了一种具有 4 个不稳定平衡点且共存四种不同类型吸引子的混沌系统。Wang 等<sup>[13]</sup>构造了一种基于忆阻器的三维对称混沌系统,观察到该系统的共存吸引子在平衡点之间具有转移行为。混沌系统具有随机性和不可预测性,因此利用混沌系统进行保密通信已成为混沌应用的重要领域之一<sup>[14]</sup>。毛北行等<sup>[15]</sup>通过构造滑模函数与控制器适应规则,提出了一种针对分数阶永磁同步电机混沌系统的自适应滑模同步方法。Wang 等<sup>[16]</sup>提出了一种具有简化控制输入的忆阻混沌系统的预定义时间混沌同步方案。Prakash 等<sup>[17]</sup>利用混沌同步的 RTL 算法实现了可见光系统的数据安全。Shi 等<sup>[18]</sup>利用带有误差反馈系数设计的 Lyapunov 理论,推导出一种新的广义时滞逆同步方法。Xin 等<sup>[19]</sup>通过对离散混沌系统的系数矩阵进行反向控制,设计了一种基于差错控制的逆离散混合混沌同步系统。此外,还出现了 PID 同步控制<sup>[20]</sup>、主动同步控制<sup>[21-22]</sup>、鲁棒同步控制<sup>[23-25]</sup>等各种控制方法。本研究以经典 Lorenz 系统为基础,设计了一种结构简单的新型四维超混沌系统,该系统只有一个平衡点,却表现出复杂的动力学特性。并且,利用错位投影同步方法,提出了一种多通道误差系统进行混沌控制,为同步通信提供了更高的安全性和实用性。

### 1 混沌模型及动力学特性分析

基于 Lorenz 系统,设计了一个新四维超混沌系统,其数学模型为:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = -cz - xz + dw - hy \\ \dot{z} = -b + xy \\ \dot{w} = yz - ew \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x, y, z, w$  为系统的状态变量,  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{w}$  为偏导,  $a, b, c, d, e, h$  为系统的控制参数。当  $a = 6, b = 20, c = 1, d = 0.5, e = 8, h = 1.5$ , 初始值为  $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (2, 2, 0.01, 0.01)$ , 式(1)系统的混沌吸引子相图如图 1 所示。

#### 1.1 耗散性

利用式(2)计算系统的耗散性:

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} \quad (2)$$

得到  $\nabla V = -a - h - e = -15.5 < 0$ , 其中,  $V$  为耗散体积,  $\nabla V$  为负数, 所以系统是耗散的。并且, 系统以  $e^{(-a-h-e)t}$  指数形式收敛, 当时间  $t$  趋于无穷大时, 系统的轨迹会收敛到一个有界的吸引子上, 使得系统最终稳定。这意味着系统轨线上的每个小体积元都逐渐趋向于零, 系统的运动最终会固定在这个吸引子上。

#### 1.2 平衡性

令式(1)等号左边全部等于 0, 可得:

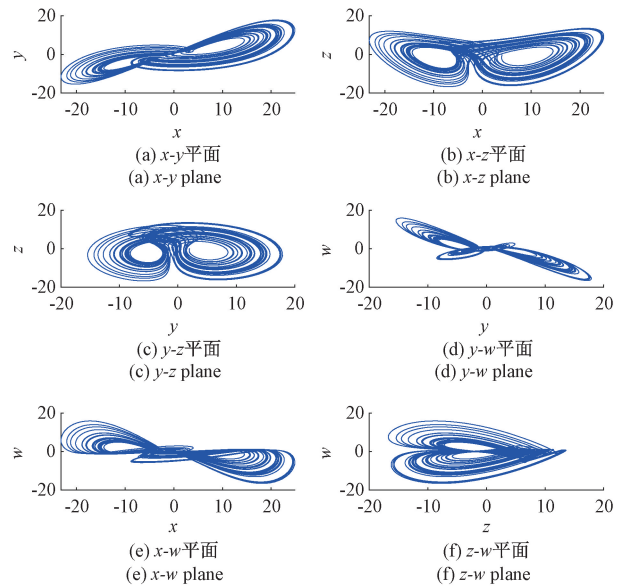


图 1 混沌吸引子相图

Fig. 1 Chaotic attractors phase diagram

$$\begin{cases} a(y - x) = 0 \\ -cz - xz + dw - hy = 0 \\ -b + xy = 0 \\ yz - ew = 0 \end{cases} \quad (3)$$

根据式(3), 计算系统的唯一平衡点为  $(4.4721, 4.4721, -1.2919, -0.7222)$ , 该系统所产生的吸引子是运动轨迹复杂的隐藏吸引子。在平衡点处计算系统的雅可比矩阵为:

$$Jac = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ -z & -h & -c - x & d \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & z & y & -e \end{bmatrix} \quad (4)$$

令  $\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ ,  $\mathbf{E}$  为单位矩阵, 计算得到系统的特征值  $\lambda_{1,2} = -0.3997 \pm 3.1879i, \lambda_3 = -6.6074, \lambda_4 = -8.0930$ , 由结果可知, 平衡点是不稳定的鞍点。得到 Lyapunov 指数 (Lyapunov exponent, LE) 为  $LE_1 = 0.4418, LE_2 = 0.0001, LE_3 = -7.4180, LE_4 = -8.5240$ , 存在两个指数小于 0 且指数之和为负, 验证了该系统为超混沌系统。

#### 1.3 LE 和分岔图

参数  $b = 20, c = 1, d = 0.5, e = 8, h = 1.5$ , 初始值为  $(2, 2, 0.01, 0.01)$  时, 随  $a$  演变的 LE 谱和分岔图分别如图 2(a)、图 3(a) 所示。观察到, 当参数  $a$  从 0 逐渐增加到 10 时, 系统的运动轨迹由周期-混沌-超混沌-拟周期-混沌依次变化。

参数  $a = 6, c = 1, d = 0.5, e = 8, h = 1.5$ , 初始值为  $(2, 2, 0.01, 0.01)$  时, 随  $b$  变化的 LE 谱和分岔图分别如图 2(b)、图 3(b) 所示。观察到, 当参数  $b$  从 0 逐渐增加到 40 时, 系统的运动轨迹由周期-拟周期-混沌-超混沌依次变化。

参数  $a = 6, b = 20, d = 0.5, e = 8, h = 1.5$ , 初始值为  $(2, 2, 0.01, 0.01)$ , 随  $c$  变化的 LE 谱和分岔图分别如图 2(c)、图 3(c) 所示。观察到, 当参数  $c$  从  $-5$  逐渐增加到  $5$  时, 系统的运动状态关于  $0$  对称, 系统的运动轨迹由周期-拟周期-混沌-拟周期-周期依次变化。

参数  $a = 6, b = 20, c = 1, e = 8, h = 1.5$ , 初始值为  $(2, 2, 0.01, 0.01)$ , 随  $d$  变化的 LE 谱和分岔图分别如图 2(d)、图 3(d) 所示。观察到, 当参数  $d$  从  $-5$  逐渐增加到  $5$  时, 系统的运动状态由周期-拟周期-混沌-拟周期-周期依次变化。

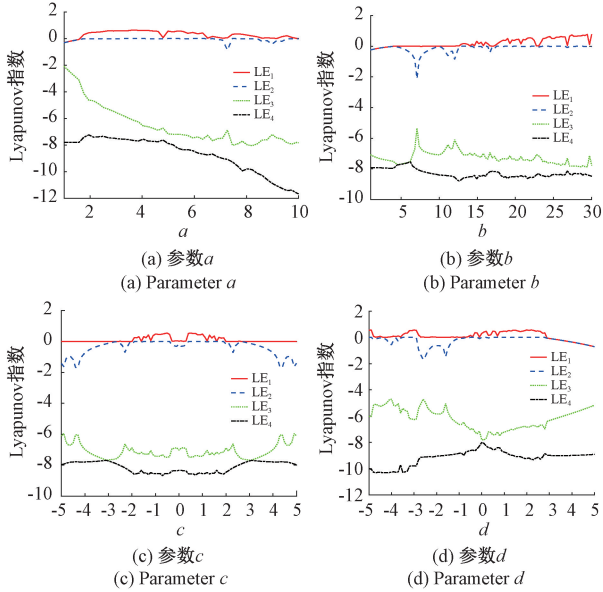


图 2 随参数变化的 Lyapunov 指数谱

Fig. 2 Lyapunov exponential spectrum with parameter variation

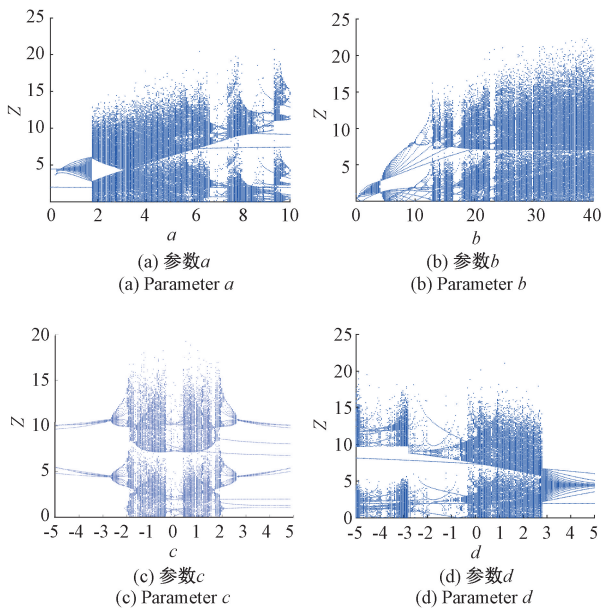


图 3 随参数变化的分岔图

Fig. 3 Bifurcation diagram with parameter variation

### 1.4 Poincare 截面和 0-1 复杂度分析

Poincare 截面是分析系统动力学行为的重要方法。当截面上只有一个或几个离散点时, 表明系统的运动是周期性的; 当存在闭合连续曲线时, 表明运动是准周期的; 而当存在连续曲线或密集点时, 则表明系统的运动呈现出混沌特性。选取平面  $z = 0$  和  $y = 0$  作为 Poincare 截面, 如图 4(a) 和 (b) 所示。通过观察可以发现, 图中的点是连续而是密集的, 可以证明系统具有混沌特性。0-1 复杂度分析是一种新的检验非线性系统满足混沌特性的方法。该方法直接计算离散数据变量的线性增长率  $K(c)$ , 判断其值趋近于 1 还是趋近于 0, 从而快速判断混沌是否存在。系统 0~1 测试图如图 4(c) 所示, 通过计算得到最终  $K(c)$  值为 0.9978, 证明了系统是混沌的。图 4(d) 为系统功率谱, 连续的功率谱曲线表明系统处于非周期状态, 而峰值则表示系统存在分岔现象。

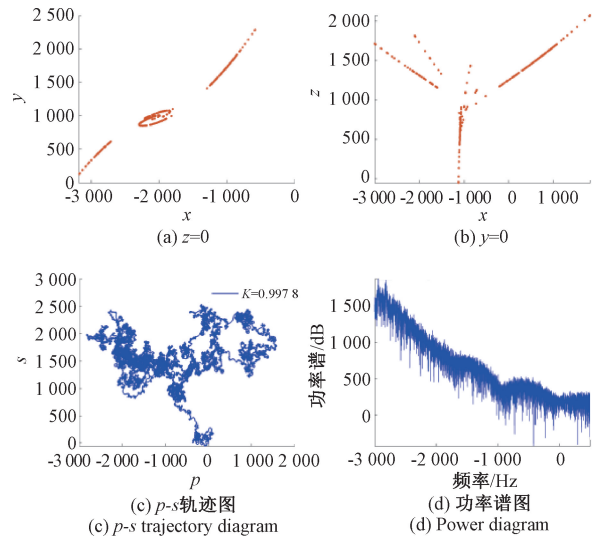


图 4 系统的混沌特性

Fig. 4 Chaotic characteristics of the system

## 2 隐藏吸引子的共存现象

参数保持不变, 分别取初始值为  $(2, 2, 0.01, 0.01)$  和  $(-2, -2, 0.01, 0.01)$ 。随参数  $b$  和参数  $c$  变化的共存分岔图如图 5(a) 和 (b) 所示, 图中红色部分为初始值  $(2, 2, 0.01, 0.01)$ , 而蓝色部分为初始值  $(-2, -2, 0.01, 0.01)$ 。

不同初始条件下的二维平面吸引子相图如图 6 所示, 可以明显观察到, 系统中存在共存的隐藏吸引子。

## 3 电路设计

利用运算放大器、乘法器等器件组成混沌系统的电路仿真图, 电路原理图如图 7 所示。

首先, 进行比例压缩, 再进行时间尺度变换, 令  $\tau = \tau_0 t, t_0 = 1000$ , 可得:

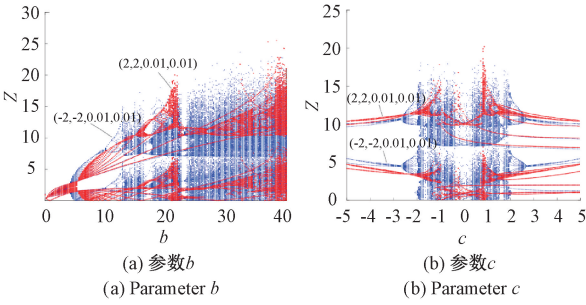


图 5 不同参数变化的共存分岔图

Fig. 5 Coexistence bifurcation diagram of different parameter variations

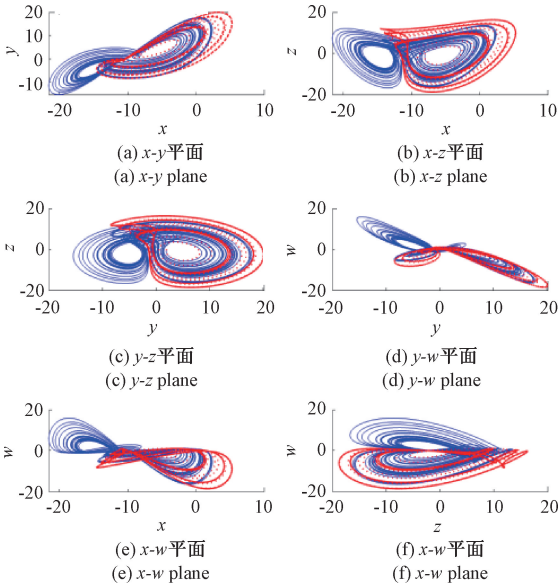


图 6 共存吸引子相图

Fig. 6 Coexistence attractor phase diagram

$$\begin{cases} \dot{x} = 6\,000(y - x) \\ \dot{y} = -1\,000z - 1\,000xz + 500w - 1\,500y \\ \dot{z} = -20\,000 + 1\,000xy \\ \dot{w} = 1\,000yz - 8\,000w \end{cases} \quad (5)$$

基于电路相关定律,将式(5)进行变换可得:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{R_1 C_1}(-y) - \frac{1}{R_2 C_1}(x) \\ \dot{y} = -\frac{1}{R_3 C_2}(z) - \frac{1}{R_4 C_2}(xz) - \frac{1}{R_5 C_2}(-w) - \frac{1}{R_6 C_2}(y) \\ \dot{z} = -2\,000 - \frac{1}{R_7 C_3}(-xy) \\ \dot{w} = -\frac{1}{R_8 C_4}(-yz) - \frac{1}{R_9 C_4}(w) \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $R_1 = R_2 = 1.667\text{ k}\Omega, R_3 = R_4 = R_7 = R_8 = 10\text{ k}\Omega, R_5 = 20\text{ k}\Omega, R_6 = 6.667\text{ k}\Omega, R_9 = 0.125\text{ k}\Omega$ , 其余电阻均为  $10\text{ k}\Omega$ , 令  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 100\text{ }\mu\text{F}$ , 经过电

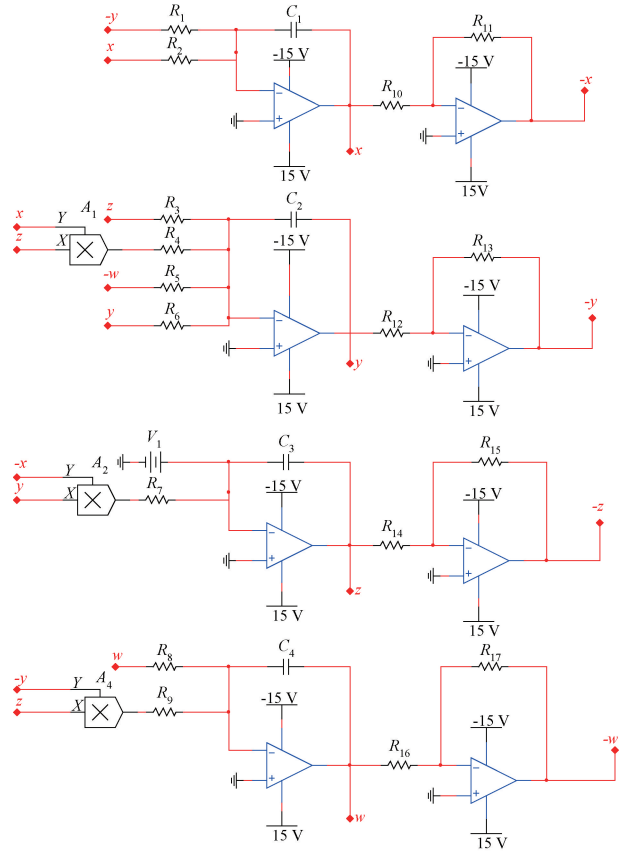


图 7 电路原理图

Fig. 7 Circuit schematic diagram

路调试仿真,得到的结果与模拟运算结果相吻合,验证了该系统的正确性。

通过电路仿真软件 Multisim 的仿真实验,系统的相位图如图 8 所示。通过对比图 1 和图 8 可知,理论吸引子与电路吸引子运动轨迹相吻合。因此,通过数值分析和实验研究均证实了系统满足混沌特性。

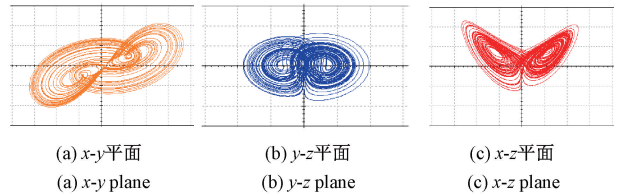


图 8 电路仿真图

Fig. 8 Circuit simulation diagram

#### 4 新系统的错位投影同步

选用 ChenLoren 系统作为驱动系统,如式(7)所示。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = kx_2x_3 \\ \dot{x}_2 = r(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_3 = 1 - x_4 \\ \dot{x}_4 = x_1x_2 - wx_4 \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $x$  为状态变量,  $\dot{x}$  为偏导,  $k, r, w$  为参数, 当

$k = 10, r = 2.5, w = 50$  时,对本文所设计的混沌系统进行改写,得响应系统:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + u_1 \\ \dot{y}_2 = -cy_3 - y_1y_3 + dy_4 - hy_2 + u_2 \\ \dot{y}_3 = -b + y_1y_2 + u_3 \\ \dot{y}_4 = y_2y_3 - ey_4 + u_4 \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $a = 6, b = 20, c = 1, d = 0.5, e = 8, h = 1.5$ ,  $u_1, u_2, u_3, u_4$  为可变的同步控制器。设计多通道误差系统为  $e_{ij} = y_i - \lambda x_j$ , 其中,  $i = j = 1, 2, 3, 4, \lambda$  为常数因子, 令  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$ 。由于是四维混沌系统,所以组成的误差系统共有 24 种不同形式的通道。对其中的两个通道进行实验验证。

通道 1:  $i = j$ , 计算误差系统可得:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{y}_1 - \lambda_1 x_1 \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_2 - \lambda_2 x_2 \\ \dot{e}_3 = \dot{y}_3 - \lambda_3 x_3 \\ \dot{e}_4 = \dot{y}_4 - \lambda_4 x_4 \end{cases} \quad (9)$$

同步控制器为:

$$\begin{cases} u_1 = -ay_2 + \lambda_1 kx_2x_3 + a\lambda_1 x_1 \\ u_2 = cy_3 + y_1y_3 - dy_4 + \lambda_2 rx_1 + hy_2 - ry_2 \\ u_3 = b - y_1y_2 + \lambda_3 - \lambda_3 x_4 + y_3 - \lambda_3 x_3 \\ u_4 = -y_2y_3 + \lambda_4 x_1x_2 + ey_4 - wy_4 \end{cases} \quad (10)$$

对误差系统(9)进行整理,可得:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1 \\ \dot{e}_2 = -re_2 \\ \dot{e}_3 = e_3 \\ \dot{e}_4 = -we_4 \end{cases} \quad (11)$$

对通道 1 进行仿真,驱动系统的初始值为  $(1, 1, 1, 1)$ , 响应系统的初始值为  $(2, 2, 0.01, 0.01)$ , 运行结果如图 9 所示,图 9(a)、(b)为驱动系统和响应系统的同步时域波形,图 9(c)为同步误差结果。

同理,对于通道 2:  $i \neq j$ , 计算误差系统可得:

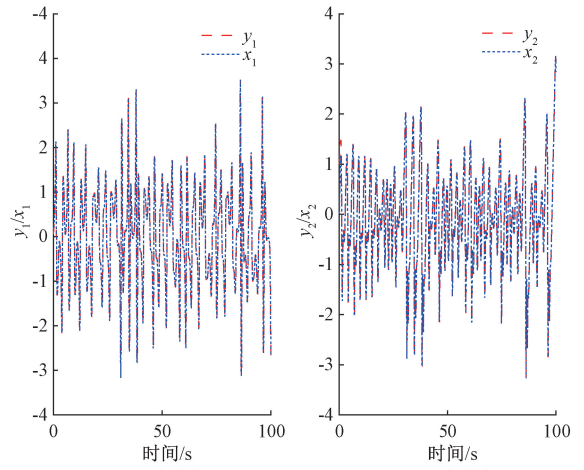
$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{y}_1 - \lambda_1 x_4 \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_2 - \lambda_2 x_3 \\ \dot{e}_3 = \dot{y}_3 - \lambda_3 x_2 \\ \dot{e}_4 = \dot{y}_4 - \lambda_4 x_1 \end{cases} \quad (12)$$

同步控制器为:

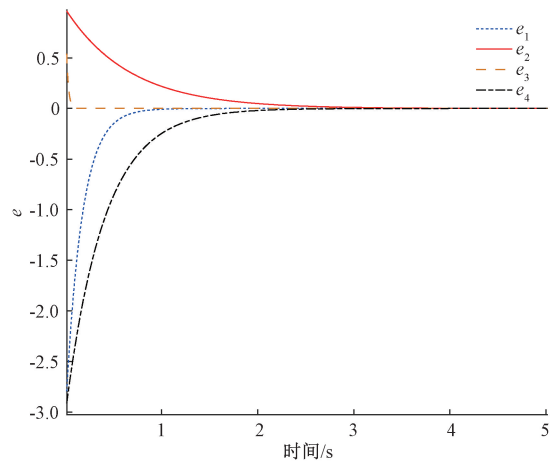
$$\begin{cases} u_1 = -a(y_2 - y_1) + \lambda_1 x_1x_2 - y_1w \\ u_2 = cy_3 + y_1y_3 - dy_4 - \lambda_2 x_4 + \lambda_2 + h\lambda_2 x_3 \\ u_3 = b - y_1y_2 + \lambda_3 rx_1 - ry_3 \\ u_4 = -y_2y_3 + \lambda_4 kx_2x_3 + e\lambda_4 x_1 \end{cases} \quad (13)$$

对误差系统式(12)进行整理,可得:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -we_1 \\ \dot{e}_2 = -he_2 \\ \dot{e}_3 = -re_3 \\ \dot{e}_4 = -ee_4 \end{cases} \quad (14)$$



(a)  $y_1-x_1$  time domain waveform (b)  $y_2-x_2$  time domain waveform



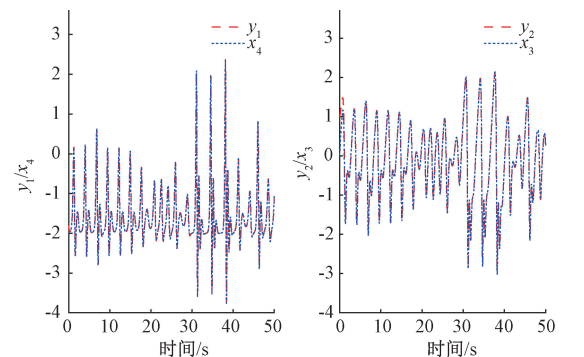
(c) 同步误差 (c) Synchronization error

图 9 通道 1 同步结果

Fig. 9 Synchronization result of channel 1

对通道 2 进行仿真,初始值保持不变,运行结果如图 10 所示。

通道 1 和通道 2 的误差系统的同步过程分别如图 9、10 所示。从图中可以观察到,在加入控制器后,误差系统的轨



(a)  $y_1-x_4$  time domain waveform (b)  $y_2-x_3$  time domain waveform

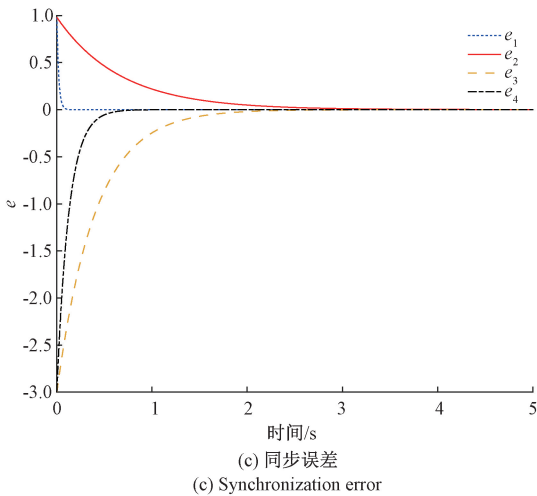


图 10 通道 2 同步结果

Fig. 10 Synchronization result of channel 2

迹在约 2.5 s 的时间收敛为零,之后保持稳定,两者之间的误差为零,这表明误差系统在同步后具有良好的鲁棒性。图 9(a)、(b)和图 10(a)、(b)分别展示了双通道在驱动系统和响应系统中的同步过程。同步误差结果如图 9(c)和图 10(c)所示,通过观察,可以明显发现同步时间较短。在此基础上,可以验证其他通道同步方案的可行性,因此,通过数值模拟清楚地证明了多通道错位投影同步方案的有效性和可靠性。

## 5 结 论

本文首先提出了一种具有隐吸引子的四维超混沌系统。通过对该系统的空间相图、LE 谱、分岔图、Poincare 截面和 0-1 复杂度的研究,证明了该系统是混沌的,并具有丰富的动力学特性、复杂的拓扑结构以及共存吸引子现象。利用仿真软件对系统电路进行设计和验证,实验仿真结果与数值仿真结果相匹配,验证了新系统的可行性。最后,提出了多通道错位投影同步方案,并设计了同步控制器,取得了较好的同步效果。这对于实际的混沌系统应用非常重要,同时也为图像加密和安全通信领域奠定了基础。

## 参考文献

- [1] FANG J, ZHAO K H, LIANG W Y. A novel color image encryption scheme using elliptic curve cryptography and hyperchaotic system [J]. *Physica Scripta*, 2023, 98(11): 115257.
- [2] HUANG Y B, WANG B, PU X R, et al. Research on ciphertext speech bihashing authentication based on chaotic system and improved public chain [J]. *The Journal of Supercomputing*, 2023, 80(5): 6661-6698.
- [3] 周衍庆, 夏晨星, 等. 基于余弦-指数混沌映射的分块图像加密算法[J]. *光电子·激光*, 2023, 34(9): 984-996.
- ZHOU Y Q, XIA CH X, et al. Block image

encryption algorithm based on cosine-exponential chaotic mapping [J]. *Journal of Optoelectronics, Laser*, 2023, 34(9): 984-996.

- [4] 曾国庆, 龚晓雪, 李文娟, 等. 数据置乱处理的光纤通信系统加密机制 [J]. *激光杂志*, 2022, 43(7): 149-153.
- ZENG G Q, GONG X X, LI W J, et al. Encryption mechanism of optical fiber communication system based on data scrambling [J]. *Laser Journal*, 2022, 43(7): 149-153.
- [5] 摆玉龙, 杨阳, 唐丽红. 一个新多涡卷混沌系统的设计及在图像加密中的应用 [J]. *电子与信息学报*, 2021, 43(2): 436-444.
- BAI Y L, YANG Y, TANG L H. Design of a new multi-scroll chaotic system and its application to image encryption [J]. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2021, 43(2): 436-444.
- [6] 颜闽秀, 张萍. 具有隐藏吸引子的新四维混沌系统的共存现象及图像加密 [J]. *山东科技大学学报(自然科学版)*, 2023, 42(4): 113-126.
- YAN M X, ZHANG P. Coexistence of new four-dimensional chaotic systems with hidden attractors and image encryption [J]. *Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2023, 42(4): 113-126.
- [7] LI Y Q, LIU J, HAO ZH F, et al. Multi-scroll hidden hyperchaotic attractor and extreme multistability with offset boosting in a memristor-coupled complex-valued laser network [J]. *The European Physical Journal Plus*, 2024, 139(2): 168.
- [8] YANG L, LAI Q. Construction and implementation of discrete memristive hyperchaotic map with hidden attractors and self-excited attractors [J]. *Integration*, 2024, 94: 102091.
- [9] TAMBA K V, BAMOU M L A, TAGNE K F, et al. Hidden extreme multistability in a smooth flux-controlled memristor based four-dimensional chaotic system and its application in image encryption [J]. *Physica Scripta*, 2024, 99(2): 025210.
- [10] 颜闽秀, 林建峰, 谢俊红. 具有无穷多共存类吸引子的保守混沌系统同步控制 [J]. *南京邮电大学学报(自然科学版)*, 2021, 41(6): 66-74.
- YAN M X, LIN J F, XIE J H. Synchronization control of conservative chaotic systems with infinite coexisting attractors [J]. *Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition)*, 2021, 41(6): 66-74.
- [11] 李得洋, 吴少培, 李国芳, 等. 基于 LMI 的分段线性系统共存吸引子转迁控制研究 [J]. *振动与冲击*, 2023,

- 42(19):30-39.
- LI D Y, WU SH P, LI G F, et al. Study on coexisting attractor transition control for piecewise-linear systems based on LMI[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2023,42(19):30-39.
- [12] 全旭,邱达,孙智鹏,等. 一个具有共存吸引子的四阶混沌系统动力学分析及 FPGA 实现[J]. *物理学报*, 2023, 72(19):18-28.
- QUAN X, QIU D, SUN ZH P, et al. Dynamic analysis and FPGA implementation of a fourth-order chaotic system with coexisting attractors[J]. *Acta Physica Sinica*, 2023,72(19):18-28.
- [13] WANG Q, HU CH Y, WU X M, et al. A 3D memristor-based chaotic system with transition behaviors of coexisting attractors between equilibrium points[J]. *Results in Physics*, 2024, 56:107201.
- [14] 闫少辉,王尔童,孙溪,等. 一个吸引子共存的混沌系统及其同步电路实现[J]. *深圳大学学报(理工版)*, 2021, 38(6):649-657.
- YAN SH H, WANG ER T, SUN X, et al. A chaotic system with attractor coexistence and its synchronization circuit implementation[J]. *Journal of Shenzhen University(Science and Technology)*, 2021, 38(6):649-657.
- [15] 毛北行,王东晓. 分数阶永磁同步电机混沌系统自适应滑模同步[J]. *浙江大学学报(理学版)*, 2023, 50(5): 564-568.
- MAO B X, WANG D X. Adaptive sliding mode synchronization of chaotic system of fractional order permanent magnet synchronous motor[J]. *Journal of Zhejiang University (Science Edition)*, 2023, 50(5): 564-568.
- [16] WANG Y, LI H Y, GUAN Y, et al. Predefined-time chaos synchronization of memristor chaotic systems by using simplified control inputs[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2022,161:112282.
- [17] PRAKASH V, MANIMEGALAI C T, et al. Data security using RTL algorithm with chaos synchronization for VLC system[J]. *Journal of Optics*, 2022,51(4):801-809.
- [18] SHI Q Q, ZHAO Y ZH, ZENG J, et al. Generalized time-delay reverse synchronization with error feedback coefficients[J]. *Physica Scripta*, 2024,99(2):025209.
- [19] XIN Y N, YAN W H, ZHAO Y P, et al. An error control-blended new design for an inverse discrete chaotic synchronization system [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023,111(21): 19911-19930.
- [20] SUMATHI R, UMASANKAR P. Optimal design of fractional order PID controller for time-delay systems: an IWLQR technique [J]. *International Journal of General Systems*, 2018,47(7):714-730.
- [21] 杨阳,摆玉龙. 具有多涡卷混沌系统在保密通信中的应用[J]. *微电子学与计算机*, 2024,41(10):1-10.
- YANG Y, BAI Y L. Application of chaotic systems with multiple vortices in secure communication[J]. *Microelectronics & Computer*, 2024,41(10): 1-10.
- [22] HUANG CH D, CAO J D. Active control strategy for synchronization and anti-synchronization of a fractional chaotic financial system [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2017,473:262-275.
- [23] YAN CH CH, LI H Y, HUANG ZH Y, et al. Highly stable, flexible delivery of microjoule-level ultrafast pulses in vacuumized anti-resonant hollow-core fibers for active synchronization[J]. *Optics Letters*, 2023, 48(7):1838-1841.
- [24] YAN X R, LI H T. Robust synchronization of coupled logical networks subject to stochastic function perturbations [J]. *Information Sciences*, 2024, 654:119843.
- [25] VIJAYA K M, NAGARANI S, PRADEEP C, et al. Robust synchronization of uncertain Markovian jumping complex interconnected neural networks via adaptive fault-tolerant control[J]. *European Journal of Control*, 2022,63:14-27.

## 作者简介

杨阳(通信作者),助教,硕士研究生,主要研究方向为混沌系统与信号处理。

E-mail: yangyang@nxnu.edu.cn

张俊芳,副教授,硕士研究生,主要研究方向为电路系统与信号处理。

E-mail: zhjf1108@163.com

万怡华,助教,硕士研究生,主要研究方向为智能控制系统。

E-mail: wyh1572020@126.com