

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2417244

考虑及时变时滞的伺服电机传动系统稳定性分析*

陈子欢¹ 周占民¹ 王鑫¹ 于齐¹ 李旭²

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所 长春 130033; 2. 大连理工大学机械工程学院 大连 116024)

摘要: 针对伺服电机传动系统建模过程对时滞的考虑不够充分、控制增益的整定缺乏以系统稳定为前提给出的分析、系统稳定判据保守性相对较高的问题,本文提出了一个具有更低保守性的时滞相关稳定判据。首先在惯量结构模型考虑及时变时滞并通过设计相应的控制器建立了时滞闭环系统状态空间方程,然后利用 Lyapunov 泛函分析法结合自由权矩阵、时滞分割、积分不等式等技术以降低稳定判据的保守性。通过运行 MATLAB 程序得出了由该稳定判据保证系统稳定的控制器增益适用时滞范围,并得出本文判据使系统稳定的最大时滞上界提高了 46.33%,验证了本文判据具有更低的保守性。本文的稳定性分析研究为更复杂的伺服电机传动系统分析与控制提供理论参考。

关键词: 稳定性分析; Lyapunov-Krasovskii 泛函; 伺服电机传动系统; 时变时滞; 状态空间

中图分类号: TP13; TN03 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.8010

Stability analysis of servo motor drive systems with time-varying delay

Chen Zihuan¹ Zhou Zhanmin¹ Wang Xin¹ Yu Qi¹ Li Xu²

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;

2. School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Aiming at the problems of insufficient consideration of time delay in the modeling process of servo motor drive system, lack of analysis given in the premise of system stability in the calibration of control gain, and relatively high conservatism of system stability criterion, this paper proposes a time delay related stability criterion with lower conservatism. Firstly, the time-varying delay is considered in the inertia structure model and the state space equations of the time-delayed closed-loop systems are established by designing the corresponding controllers, and then the Lyapunov generalized functional analysis method is used in combination with the techniques of free weight matrix, time delay splitting and integral inequality to reduce the conservatism of the stability criterion. The applicable time delay range of the controller gain for system stability guaranteed by this stability criterion is derived by running the MATLAB program, and it is concluded that this paper's criterion improves the upper bound of the maximum time delay for system stability by 46.33%, which verifies that this paper's criterion has a lower conservatism. The stability analysis of this paper provides theoretical reference for the analysis and control of more complex servo motor drive systems.

Keywords: stability analysis; Lyapunov-Krasovskii generalization; servo motor drive systems; time-varying delays; state space

0 引言

伺服电机传动系统在卫星通信雷达、激光切割机、柔性机械臂和伺服压力机等众多机电一体化设备上有重要的应用,且在高速、高精度和小型化等性能指标有日益严苛的需求^[1-4]。然而,伺服电机传动系统的控制性能以及稳定性不可避免地会受到时滞的影响^[5-8],例如在系统传动、信号传

输、信号检测等过程中通常存在时滞,因此对伺服电机传动系统进行建模、分析与控制时必须充分考虑时滞因素。双惯量系统是描述伺服电机传动系统结构特性的一种常用且重要的基本动力学模型^[9],双惯量系统比理想刚性的单惯量系统^[10]额外考虑了传动环节的柔性,因而更具一般性。在开环动力学模型中设计控制器可建立相应的闭环系统,此建模过程为稳定性分析及控制作铺垫^[11-12]。

收稿日期:2024-10-30

* 基金项目:吉林省科技发展计划项目(SKJ202402024)资助

对时滞系统稳定性进行分析是时滞系统控制分析研究中的一个基本问题。当前时滞系统研究中最重要且应用广泛的方法就是 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法^[13-15], 其核心思想就是利用系统的相关状态信息构造一个描述系统能量随时间变化的 Lyapunov-Krasovskii 泛函^[16-18], 再找出使得有界泛函为正、且泛函随时间不断递减的约束条件。这些约束条件是使泛函正定且其导数负定的条件, 它们构成了系统稳定性分析的判据。稳定判据往往表述为一系列线性矩阵不等式 (linear matrix inequality, LMI) 的形式。LMI 问题的求解已能通过计算机来实现, 这得益于凸优化技术的发展和强大的科学计算软件 MATLAB 等的出现^[19]。因此, Lyapunov-Krasovskii 泛函结合 LMI 技术是现阶段时滞系统稳定性分析最常用的途径^[20]。

需要指出的是利用此方法得到的稳定判据是保证系统稳定的充分而非必要条件, 所以基于稳定判据所得保证系统稳定的时滞上界往往会存在保守性, 尽可能地降低这种保守性是时滞相关稳定性分析研究的焦点^[21]。在以前, 几乎所有 Lyapunov 稳定性分析都是运用模型变换和交叉项界定技术的, 其分析过程首先是利用 Newton-Leibniz 公式对时滞系统进行模型变换, 然后通过不等式放大界定技术对泛函导数中出现的积分项进行线性化而便于在计算机处理, 然而模型变换和不等式界定处理的过程均会带来一定程度上的保守性^[22]。

通过分析模型变换方法的本质, 近年来发展出了一种全新的自由权矩阵方法, 利用自由权矩阵的松散特性, 通过求取最优的权矩阵来大大降低传统的固定权矩阵方法的保守性, 经过进一步的完善和改进使自由权矩阵成为在时滞系统研究中最主要的方法之一^[23]。此外, 张传科^[24]基于自由权矩阵提出了积分不等式方法, 它直接对泛函导数中的二次型积分项进行估计获得基于矩阵不等式的时滞相关条件。

要保证伺服电机传动系统的优良性能, 就需要对含有时滞的伺服电机传动系统开展进一步研究^[25]。为此本文以双惯量时滞伺服电机传动系统为研究对象, 建立了虑及时变时滞的闭环系统状态空间模型。通过研究时变时滞对系统稳定性影响, 利用 Lyapunov 泛函分析法, 提出了一种结合自由权矩阵、时滞分割、积分不等式等技术而得出的稳定性判据。应用该时滞稳定判据, 降低了使系统稳定的时滞上界求解的保守性, 扩大了求解保证系统稳定的控制增益适用时滞范围。

1 基于状态空间的伺服电机传动系统建模

伺服电机传动系统可以精确地把驱动端的运动指令传递到负载端。基于状态空间的伺服电机传动系统建模虑及驱动端电磁转矩输入存在的时变时滞。在伺服电机传动系统开环动力学模型中, 设计控制器可获得相应基于状态空间的闭环系统模型。

1.1 双惯量系统

在伺服电机传动系统中传动链长度通常不可忽略, 传动机构无法视为刚体并在力矩传递时存在弹性形变, 需将从驱动端到负载端的传动环节视为柔性。连接驱动端和负载端的传动机构可视为转动惯量忽略不计的传动轴, 由此可获得双惯量开环系统动力学模型, 包括驱动电机与负载两个惯量体、中间传动轴。两惯量体在驱动端的电磁转矩和负载端的负载转矩共同作用下, 在电机两端均产生各自的角位移和转速, 在中间轴产生抗扭转矩。考虑系统含有的时变时滞, 其开环结构模型如图 1 所示。在图 1 中, J_1 和 J_2 分别为驱动端惯量体和负载端惯量体的转动惯量, b_1 和 b_2 分别为驱动端和负载端的阻尼, K_s 和 c_s 分别为传动轴的抗扭刚度和阻尼, 这 6 个参数为模型的系统参数。 t 为时间, $\tau(t)$ 为系统中含有的时变时滞, $T_e(t - \tau(t))$ 为驱动端惯量体的电磁转矩, $T_L(t)$ 为负载端惯量体的负载转矩, $\theta_m(t)$ 和 $\omega_m(t)$ 分别为电机驱动端惯量体的角位移和转速, $\theta_l(t)$ 和 $\omega_l(t)$ 分别为电机负载端惯量体的角位移和转速, $T_s(t)$ 为在中间轴产生的抗扭转矩。

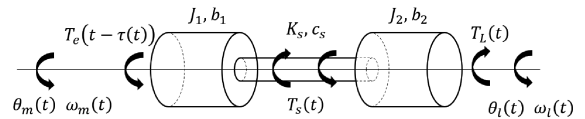


图 1 双惯量伺服电机传动系统动力学模型简图

Fig. 1 Sketch of the dynamics model of the dual-inertia servo drive systems

下面对双惯量伺服电机传动系统开环结构模型进行动力学分析。

对驱动端的惯量体分析, 由牛顿第二定律可知:

$$J_1 \ddot{\theta}_m(t) = T_e(t - \tau(t)) - b_1 \dot{\theta}_m(t) - T_s(t) \quad (1)$$

其中, $\dot{\theta}_m(t)$ 和 $\ddot{\theta}_m(t)$ 分别为 $\theta_m(t)$ 的一阶导 (即 $\omega_m(t)$) 和二阶导 (即驱动端角加速度)。

对负载端的惯量体分析, 由牛顿第二定律可知:

$$J_2 \ddot{\theta}_l(t) = T_s(t) - b_2 \dot{\theta}_l(t) - T_L(t) \quad (2)$$

其中, $\dot{\theta}_l(t)$ 和 $\ddot{\theta}_l(t)$ 分别为 $\theta_l(t)$ 的一阶导 (即 $\omega_l(t)$) 和二阶导 (即负载端角加速度)。

对中间传动轴分析, 由于传动轴的转动惯量可忽略不计, 故转为静力学分析, 可知:

$$T_s(t) = c_s (\dot{\theta}_m(t) - \dot{\theta}_l(t)) + K_s (\theta_m(t) - \theta_l(t)) \quad (3)$$

由以上动力学分析式 (1)~(3) 可知, 双惯量时滞伺服电机传动开环系统模型可用如下微分方程组来描述:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_m(t) = T_e(t - \tau(t)) - b_1 \dot{\theta}_m(t) - T_s(t) \\ J_2 \ddot{\theta}_l(t) = T_s(t) - b_2 \dot{\theta}_l(t) - T_L(t) \\ T_s(t) = c_s (\dot{\theta}_m(t) - \dot{\theta}_l(t)) + K_s (\theta_m(t) - \theta_l(t)) \\ \omega_m(t) = \dot{\theta}_m(t) \\ \omega_l(t) = \dot{\theta}_l(t) \end{cases} \quad (4)$$

由式(4)可整理得如下双惯量时滞开环系统状态空间方程:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_s}{J_1} & -\frac{b_1+c_s}{J_1} & \frac{K_s}{J_1} & \frac{c_s}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{J_2} & \frac{c_s}{J_2} & -\frac{K_s}{J_2} & -\frac{b_2+c_s}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t-\tau(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J_2} \end{bmatrix} u_L(t) \\ y(t) = x_3(t) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

其中, $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$ 和 $x_4(t)$ 四个状态分别为 $\theta_m(t)$ 、 $\omega_m(t)$ 、 $\theta_r(t)$ 和 $\omega_r(t)$ 、 $u_e(t-\tau(t)) = T_e(t-\tau(t))$ 为控制输入, $u_L(t) = T_L(t)$ 为负载输入, $y(t) = x_3(t)$ 为输出。

1.2 闭环伺服电机传动系统

如式(5)所示的时滞伺服电机传动开环系统状态空间方程,可化简为如下的状态空间方程:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u_e(t-\tau(t)) + \mathbf{L}u_L(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ 为状态向量, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 为状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 的一阶导, \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{L} 和 \mathbf{C} 阵的具体表示对应于式(5),分别为开环系统参数阵、驱动端参数阵、负载端参数阵和输出参数阵,式(6)与式(5)一一对应。

设定负载端惯量体的控制目标角位移,并在系统中设计控制器来调节驱动端输入力矩,以使负载端惯量体输出角位移到达稳定状态时等于目标角位移。含时变时滞的伺服传动闭环系统框图如图 2 所示,在图 2 中 $\theta_r(t)$ 为负载端惯量体的控制目标角位移。

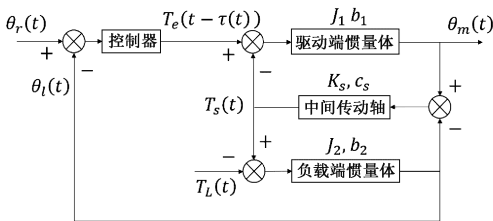


图 2 时滞伺服传动闭环系统框图

Fig. 2 Block diagram of delay servo drive closed loop systems

当控制器为 PID 时,3 个控制增益为:比例系数、积分

系数和微分系数,则闭环输入应满足如下公式:

$$u_e(t) = -K_P[y(t) - \theta_r(t)] - K_I \int [y(t) - \theta_r(t)] dt - K_D \frac{d}{dt} [y(t) - \theta_r(t)] \quad (7)$$

其中, K_P 、 K_I 和 K_D 分别为比例系数、积分系数和微分系数,则 $u_e(t)$ 为闭环输入。则有如下所示的时滞伺服传动闭环系统状态空间方程:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}u_e(t-\tau(t)) + \bar{\mathbf{L}}u_L(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{D}}_w u_L(t) \\ u_e(t) = -\mathbf{K}[\bar{\mathbf{y}}(t) - \bar{\boldsymbol{\theta}}_r(t)] \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 、 $\bar{\mathbf{y}}(t)$ 、 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_r(t)$ 和 \mathbf{K} 分别为状态变量、输出变量、目标转速向量和控制增益阵, $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 为 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 的一阶导,且向量 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 、 $\bar{\mathbf{y}}(t)$ 、 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_r(t)$ 和矩阵 \mathbf{K} 、 $\bar{\mathbf{A}}$ 、 $\bar{\mathbf{B}}$ 、 $\bar{\mathbf{L}}$ 、 $\bar{\mathbf{C}}$ 、 $\bar{\mathbf{D}}_w$ 的具体表达式如下:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{x}^T(t) \ \int \mathbf{y}^T(t) dt]^T \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \left[\mathbf{y}^T(t) \ \int \mathbf{y}^T(t) dt \ \frac{d}{dt} \mathbf{y}^T(t) \right]^T \quad (10)$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_r(t) = \left[\boldsymbol{\theta}_r^T(t) \ \int \boldsymbol{\theta}_r^T(t) dt \ \frac{d}{dt} \boldsymbol{\theta}_r^T(t) \right]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{K} = [K_P \ K_I \ K_D] \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{D}}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (14)$$

系统式(8)可整理为如下时滞模型:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{A}}_d \bar{\mathbf{x}}(t-\tau(t)) + \bar{\mathbf{B}}_{w1} u_L(t) + \bar{\mathbf{B}}_{w2} u_L(t-\tau(t)) + \bar{\mathbf{B}}_r \bar{\boldsymbol{\theta}}_r(t-\tau(t)) \quad (15)$$

其中, $\bar{\mathbf{A}}_d = -\bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}\bar{\mathbf{C}}$ 为状态时滞系数阵, $\bar{\mathbf{B}}_{w1} = \bar{\mathbf{L}}$ 为负载非时滞系数阵, $\bar{\mathbf{B}}_{w2} = -\bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}\bar{\mathbf{D}}_w$ 为负载时滞系数阵, $\bar{\mathbf{B}}_r = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}$ 为目标角位移时滞系数阵。

考虑系统式(15)稳定运行时的平衡状态,则有:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}^*(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}^*(t) + \bar{\mathbf{A}}_d \bar{\mathbf{x}}^*(t-\tau(t)) + \bar{\mathbf{B}}_{w1} u_L(t) + \bar{\mathbf{B}}_{w2} u_L(t-\tau(t)) + \bar{\mathbf{B}}_r \bar{\boldsymbol{\theta}}_r(t-\tau(t)) \quad (16)$$

其中, $\bar{\mathbf{x}}^*(t)$ 为平衡状态。设 $\mathbf{x}_s(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}^*(t)$ 为新状态变量,令 $\mathbf{A}_s = \bar{\mathbf{A}}$ 、 $\mathbf{A}_{ds} = \bar{\mathbf{A}}_d$, 则由式(15)减去式(16)可得:

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{A}_{ds} \mathbf{x}_s(t-\tau(t)) \quad (17)$$

其中, \mathbf{A}_s 和 \mathbf{A}_{ds} 为闭环系统阵和时滞阵,状态 $\mathbf{x}_s(t)$ 的平衡状态为原点 $\mathbf{x}_e = 0$ 。由此可知,系统式(15)在平衡状态 $\bar{\mathbf{x}}^*(t)$ 的稳定性,等价于系统式(17)在原点的稳定性。

2 时滞系统稳定性分析

针对闭环时滞伺服电机传动系统,研究系统存在的时变时滞,进行稳定性分析获得闭环系统稳定判据。

2.1 稳定性分析前的准备

本章为书写方便且规避符号与上一章混淆的情况,而省略系统式(17)的下角标 s 得到系统:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_d x(t - \tau(t)) \quad (18)$$

从式(18)开始, \mathbf{A} 、 \mathbf{A}_d 和 $x(t)$ 的含义同式(17)的 \mathbf{A}_s 、 \mathbf{A}_{ds} 和 $x_s(t)$ 。以原点 $x_e = 0$ 为稳定状态的系统式(18),假设其时滞和初始状态满足如下条件:

$$0 \leq \tau(t) \leq h, x(t) = \lambda(t), t \in [-h, 0] \quad (19)$$

其中,常数 h 为时滞 $\tau(t)$ 的上界, $\lambda(t)$ 为可微初值函数。若 $\exists \delta > 0, \alpha \geq 0, \gamma > 0$ 三常数,当 $\lambda(t)$ 的范数 $\|\lambda(t)\| \leq \delta$ 且从 $\lambda(t)$ 沿状态轨线出发在接近稳定状态的过程中,使系统状态 $x(t)$ 的范数满足 $\|x(t)\| \leq \gamma e^{-\alpha t} \delta$, 则称平衡状态 x_e 是指指数渐近稳定的。对于时滞伺服电机传动系统,将指数稳定性用于分析中,能避免出现系统稳定时间过长的情况。

下面对系统式(18)利用 Lyapunov 泛函分析法进行指数稳定性分析。对时滞 $\tau(t)$ 的区间 $[0, h]$ 一分为二以降低稳定性分析的保守性,公式如下:

$$0 = h_0 \leq h_1 < h_2 = h, h_1 = h_2/m, m > 1 \quad (20)$$

其中, $h_0 = 0$ 为时滞下界, $h_2 = h$ 为时滞上界, $h_1 \in (0, h)$ 为时滞区间的分界, m 为时滞分割系数。系统式(18)的时滞 $\tau(t)$ 存在以下两种情况:

$$\text{情况 1: } 0 = h_0 \leq \tau_1(t) \leq h_1 < h_2 = h \quad (21)$$

$$\text{情况 2: } 0 = h_0 \leq h_1 < \tau_2(t) \leq h_2 = h \quad (22)$$

其中, $\tau_1(t)$ 和 $\tau_2(t)$ 分别为情况 1 和情况 2 的时滞,通过寻找适当的 m 值,可使时滞上界 h 取到最大值 h_{\max} 。

$$\text{引理(Schur 补}^{[26]}) \text{若给定实对称矩阵 } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{12}^T & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix},$$

则存在如下等价关系(在本文中方阵小于 0 代表负定):

$$\mathbf{S} < 0 \Leftrightarrow \mathbf{S}_{11} < 0, \mathbf{S}_{22} - \mathbf{S}_{12}^T \mathbf{S}_{11}^{-1} \mathbf{S}_{12} < 0 \Leftrightarrow \mathbf{S}_{22} < 0, \mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12} \mathbf{S}_{22}^{-1} \mathbf{S}_{12}^T < 0 \quad (23)$$

2.2 基于自由权矩阵一时滞分割的改进稳定判据

本文利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函分析法结合自由权矩阵、时滞分割、积分不等式技术,对时滞系统式(18)提出如下的稳定判据。

给定时滞上界 $h_2 = h > 0$ 、时滞分割系数 $m = h_2/h_1 > 1$ 及指数衰减率 $\alpha \geq 0$, 若存在合适维数的对称阵 $\mathbf{P}, \mathbf{R}_i, \mathbf{Z}_i (i = 1, 2)$, 合适维数矩阵 $\mathbf{N}_j, \mathbf{M}_j, \mathbf{O}_j, \mathbf{S}_j, \mathbf{T}_j, \mathbf{U}_j (j = 1, 2, 3, 4)$, 使得如下 LMI 成立:

$$\mathbf{P} > 0, \mathbf{R}_i > 0, \mathbf{Z}_i > 0 (i = 1, 2) \quad \Phi < 0, \Psi < 0 \quad (24)$$

其中(在本文中 * 代表方阵中的对称元素),

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Delta & h_1 e^{-\alpha h_1} \mathbf{N} & h_1 e^{-\alpha h_1} \mathbf{M} & (h_2 - h_1) e^{-\alpha h_2} \mathbf{O} \\ * & h_1 e^{-\alpha h_1} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ * & * & h_1 e^{-\alpha h_1} \mathbf{Z}_1 & 0 \\ * & * & * & (h_2 - h_1) e^{-\alpha h_2} \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Omega & h_1 e^{-\alpha h_1} \mathbf{S} & (h_2 - h_1) e^{-\alpha h_2} \mathbf{T} & (h_2 - h_1) e^{-\alpha h_2} \mathbf{U} \\ * & h_1 e^{-\alpha h_1} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ * & * & (h_2 - h_1) e^{-\alpha h_2} \mathbf{Z}_2 & 0 \\ * & * & * & (h_2 - h_1) e^{-\alpha h_2} \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 \\ \mathbf{N}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 \\ \mathbf{S}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{T}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ * & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ * & * & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ * & * & * & \Delta_{44} \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \\ * & * & \Omega_{33} & \Omega_{34} \\ * & * & * & \Omega_{44} \end{bmatrix} \quad (28)$$

式中: $\Delta_{11} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \alpha \mathbf{P} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}^T \mathbf{O}\mathbf{A} + (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T) e^{-\alpha h_1}$

$$\Delta_{12} = \mathbf{P}\mathbf{A}_d + \mathbf{A}^T \mathbf{O}\mathbf{A}_d + (\mathbf{N}_2^T - \mathbf{N}_1 + \mathbf{M}_1) e^{-\alpha h_1}$$

$$\Delta_{13} = (\mathbf{N}_3^T - \mathbf{M}_1) e^{-\alpha h_1} + \mathbf{O}_1 e^{-\alpha h_2}$$

$$\Delta_{14} = \mathbf{N}_4^T e^{-\alpha h_1} - \mathbf{O}_1 e^{-\alpha h_2}$$

$$\Delta_{22} = \mathbf{A}_d^T \mathbf{O}\mathbf{A}_d + (-\mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_2^T + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2^T) e^{-\alpha h_1}$$

$$\Delta_{23} = (-\mathbf{N}_3^T + \mathbf{M}_3^T - \mathbf{M}_2) e^{-\alpha h_1} + \mathbf{O}_2 e^{-\alpha h_2}$$

$$\Delta_{24} = (-\mathbf{N}_4^T + \mathbf{M}_4^T) e^{-\alpha h_1} - \mathbf{O}_2 e^{-\alpha h_2}$$

$$\Delta_{33} = (-\mathbf{R}_1 - \mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_3^T) e^{-\alpha h_1} + (\mathbf{O}_3 + \mathbf{O}_3^T) e^{-\alpha h_2}$$

$$\Delta_{34} = -\mathbf{M}_4^T e^{-\alpha h_1} + (\mathbf{O}_4^T - \mathbf{O}_3) e^{-\alpha h_2}$$

$$\Delta_{44} = (-\mathbf{R}_2 - \mathbf{O}_4 - \mathbf{O}_4^T) e^{-\alpha h_2}$$

$$\Omega_{11} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \alpha \mathbf{P} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}^T \mathbf{O}\mathbf{A} + (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1^T) e^{-\alpha h_1}$$

$$\Omega_{12} = \mathbf{P}\mathbf{A}_d + \mathbf{A}^T \mathbf{O}\mathbf{A}_d + \mathbf{S}_2^T e^{-\alpha h_1} + (-\mathbf{T}_1 + \mathbf{U}_1) e^{-\alpha h_2}$$

$$\Omega_{13} = (\mathbf{S}_3^T - \mathbf{S}_1) e^{-\alpha h_1} + \mathbf{T}_1 e^{-\alpha h_2}$$

$$\Omega_{14} = \mathbf{S}_4^T e^{-\alpha h_1} - \mathbf{U}_1 e^{-\alpha h_2}$$

$$\Omega_{22} = \mathbf{A}_d^T \mathbf{O}\mathbf{A}_d + (-\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2^T + \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_2^T) e^{-\alpha h_2}$$

$$\Omega_{23} = -\mathbf{S}_2 e^{-\alpha h_1} + (-\mathbf{T}_3^T + \mathbf{T}_2 + \mathbf{U}_3^T) e^{-\alpha h_2}$$

$$\Omega_{24} = (-\mathbf{T}_4^T + \mathbf{U}_4^T - \mathbf{U}_2) e^{-\alpha h_2}$$

$$\Omega_{33} = (-\mathbf{R}_1 - \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_3^T) e^{-\alpha h_1} + (\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3^T) e^{-\alpha h_2}$$

$$\mathbf{\Omega}_{34} = -\mathbf{S}_4^T e^{-ah_1} + (\mathbf{T}_4^T - \mathbf{U}_3) e^{-ah_2}$$

$$\mathbf{\Omega}_{44} = (-\mathbf{R}_2 - \mathbf{U}_4 - \mathbf{U}_4^T) e^{-ah_2}$$

$$\mathbf{\Theta} = h_1 \mathbf{Z}_1 + (h_2 - h_1) \mathbf{Z}_2$$

则满足时滞约束式(19)的系统式(18)是指数稳定的。

证明:根据经验构造出的 Lyapunov 泛函为:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \quad (29)$$

$$V_1(t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (30)$$

$$V_2(t) = \int_{t-h_1}^t \mathbf{x}^T(s) e^{\alpha(s-t)} \mathbf{R}_1 \mathbf{x}(s) ds +$$

$$\int_{t-h_2}^t \mathbf{x}^T(s) e^{\alpha(s-t)} \mathbf{R}_2 \mathbf{x}(s) ds \quad (31)$$

$$V_3(t) = \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}^T(s) e^{\alpha(s-t)} \mathbf{Z}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds d\theta +$$

$$\int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}^T(s) e^{\alpha(s-t)} \mathbf{Z}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds d\theta \quad (32)$$

其中, $\mathbf{P}, \mathbf{R}_i, \mathbf{Z}_i (i = 1, 2)$ 均为正定阵。令 $\dot{V}(t)$ 表示 $V(t)$ 的一阶导,若 $\exists \alpha \geq 0$ 使得 $\dot{V}(t) + \alpha V(t)$ 为负定,则系统式(18)指数稳定。将 $\dot{V}(t) + \alpha V(t)$ 展开如下:

$$\dot{V}(t) + \alpha V(t) = \dot{V}_1(t) + \alpha V_1(t) + \dot{V}_2(t) + \alpha V_2(t) + \dot{V}_3(t) + \alpha V_3(t) \quad (33)$$

$$\dot{V}_1(t) + \alpha V_1(t) = \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \alpha \mathbf{P}) \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(t - \tau(t)) \quad (34)$$

$$\dot{V}_2(t) + \alpha V_2(t) = \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t - h_1) e^{-\alpha h_1} \mathbf{R}_1 \mathbf{x}(t - h_1) - \mathbf{x}^T(t - h_2) e^{-\alpha h_2} \mathbf{R}_2 \mathbf{x}(t - h_2) \quad (35)$$

$$\dot{V}_3(t) + \alpha V_3(t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{A}^T \mathbf{\Theta} \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{A}^T \mathbf{\Theta} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(t - \tau(t)) + \mathbf{x}^T(t - \tau(t)) \mathbf{A}_d^T \mathbf{\Theta} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(t - \tau(t)) - \int_{t-h_1}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) e^{\alpha(s-t)} \mathbf{Z}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{\mathbf{x}}^T(s) e^{\alpha(s-t)} \mathbf{Z}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \quad (36)$$

其中, $\mathbf{\Theta} = h_1 \mathbf{Z}_1 + (h_2 - h_1) \mathbf{Z}_2$ 。下面考虑对时滞分割而产生的两种情况:

1) 对于情况 1 时滞 $\tau(t) = \tau_1(t) \in [0, h_1], \dot{V}_3(t) + \alpha V_3(t)$ 的后两项积分可写为:

$$-\int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) e^{\alpha(s-t)} \mathbf{Z}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \int_{t-h_1}^{t-\tau_1(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(s) e^{\alpha(s-t)} \mathbf{Z}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{\mathbf{x}}^T(s) e^{\alpha(s-t)} \mathbf{Z}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \leq e^{-\alpha h_1} \int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{Z}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds - e^{-\alpha h_1} \int_{t-h_1}^{t-\tau_1(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{Z}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds - e^{-\alpha h_2} \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{Z}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \quad (37)$$

对情况 1 引入向量:

$$\boldsymbol{\delta}_1(t) = [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t - \tau_1(t)) \quad \mathbf{x}^T(t - h_1) \quad \mathbf{x}^T(t - h_2)]^T \quad (38)$$

为消除式(34)的 3 个积分项,引入以下三组合适维数的自由权矩阵:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 \\ \mathbf{N}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_4 \end{bmatrix} \quad (39)$$

由 Newton-Leibniz 公式可知:

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau_1(t)) - \int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds = 0 \quad (40)$$

$$\mathbf{x}(t - \tau_1(t)) - \mathbf{x}(t - h_1) - \int_{t-h_1}^{t-\tau_1(t)} \dot{\mathbf{x}}(s) ds = 0 \quad (41)$$

$$\mathbf{x}(t - h_1) - \mathbf{x}(t - h_2) - \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{\mathbf{x}}(s) ds = 0 \quad (42)$$

为消去式(37)右端第 1 项积分 $\int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{Z}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds$,

引入 $2\boldsymbol{\delta}_1^T(t) \mathbf{N} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau_1(t)) - \int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds] = 0$, 则:

$$2\boldsymbol{\delta}_1^T(t) \mathbf{N} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau_1(t))] = \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T) \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{N}_2^T \mathbf{x}(t - \tau_1(t)) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{N}_3^T \mathbf{x}(t - h_1) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{N}_4^T \mathbf{x}(t - h_2) + 2\mathbf{x}^T(t) (-\mathbf{N}_1) \mathbf{x}(t - \tau_1(t)) + \mathbf{x}^T(t - \tau_1(t)) (-\mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_2^T) \mathbf{x}(t - \tau_1(t)) + 2\mathbf{x}^T(t - \tau_1(t)) (-\mathbf{N}_3) \mathbf{x}(t - h_1) + 2\mathbf{x}^T(t - \tau_1(t)) (-\mathbf{N}_4) \mathbf{x}(t - h_2) \quad (43)$$

$$- 2\boldsymbol{\delta}_1^T(t) \mathbf{N} \int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds \leq \tau_1(t) \boldsymbol{\delta}_1^T(t) \mathbf{N} \mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\delta}_1(t) + \int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{Z}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \quad (44)$$

为消去式(37)右端第 2 项积分 $\int_{t-h_1}^{t-\tau_1(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{Z}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds$,

引入 $2\boldsymbol{\delta}_1^T(t) \mathbf{M} [\mathbf{x}(t - \tau_1(t)) - \mathbf{x}(t - h_1) - \int_{t-h_1}^{t-\tau_1(t)} \dot{\mathbf{x}}(s) ds] = 0$, 则:

$$2\boldsymbol{\delta}_1^T(t) \mathbf{M} [\mathbf{x}(t - \tau_1(t)) - \mathbf{x}(t - h_1)] = 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{M}_1 \mathbf{x}(t - \tau_1(t)) + \mathbf{x}^T(t - \tau_1(t)) (\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2^T) \mathbf{x}(t - \tau_1(t)) + 2\mathbf{x}^T(t - \tau_1(t)) \mathbf{M}_3^T \mathbf{x}(t - h_1) + 2\mathbf{x}^T(t - \tau_1(t)) \mathbf{M}_4^T \mathbf{x}(t - h_2) + 2\mathbf{x}^T(t) (-\mathbf{M}_1) \mathbf{x}(t - h_1) + 2\mathbf{x}^T(t - \tau_1(t)) (-\mathbf{M}_2) \mathbf{x}(t - h_1) + \mathbf{x}^T(t - h_1) (-\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_3^T) \mathbf{x}(t - h_1) + 2\mathbf{x}^T(t - h_1) (-\mathbf{M}_4) \mathbf{x}(t - h_2) \quad (45)$$

$$- 2\boldsymbol{\delta}_1^T(t) \mathbf{M} \int_{t-h_1}^{t-\tau_1(t)} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \leq (h_1 - \tau_1(t)) \boldsymbol{\delta}_1^T(t) \mathbf{M} \mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{M}^T \boldsymbol{\delta}_1(t) + \int_{t-h_1}^{t-\tau_1(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{Z}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \quad (46)$$

为消去式(37)右端第 3 项积分 $\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{Z}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds$,

引入 $2\boldsymbol{\delta}_1^T(t) \mathbf{O} [\mathbf{x}(t - h_1) - \mathbf{x}(t - h_2) - \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{\mathbf{x}}(s) ds] = 0$, 则:

$$2\boldsymbol{\delta}_1^T(t) \mathbf{O} [\mathbf{x}(t - h_1) - \mathbf{x}(t - h_2)] =$$

$$\begin{aligned}
 & 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{O}_1\mathbf{x}(t-h_1) + 2\mathbf{x}^T(t-\tau_1(t))\mathbf{O}_2\mathbf{x}(t-h_1) + \\
 & \mathbf{x}^T(t-h_1)(\mathbf{O}_3 + \mathbf{O}_3^T)\mathbf{x}(t-h_1) + \\
 & 2\mathbf{x}^T(t-h_1)\mathbf{O}_4^T\mathbf{x}(t-h_2) + 2\mathbf{x}^T(t)(-\mathbf{O}_1)\mathbf{x}(t-h_2) + \\
 & 2\mathbf{x}^T(t-\tau_1(t))(-\mathbf{O}_2)\mathbf{x}(t-h_2) + \\
 & 2\mathbf{x}^T(t-h_1)(-\mathbf{O}_3)\mathbf{x}(t-h_2) + \\
 & \mathbf{x}^T(t-h_2)(-\mathbf{O}_4 - \mathbf{O}_4^T)\mathbf{x}(t-h_2)
 \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
 & -2\delta_1^T(t)\mathbf{O}\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{\mathbf{x}}(s)ds \leq (h_2-h_1)\delta_1^T(t)\mathbf{O}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{O}^T\delta_1(t) + \\
 & \int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{\mathbf{x}}^T(s)\mathbf{Z}_2\dot{\mathbf{x}}(s)ds
 \end{aligned} \quad (48)$$

将式(34)~(36)、(43)~(48)代入到式(33),得到:

$$\dot{V}(t) + \alpha V(t) \leq \delta_1^T(t)\boldsymbol{\Phi}\delta_1(t) \quad (49)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Phi} = & \boldsymbol{\Delta} + \tau_1(t)e^{-\alpha h_1}\mathbf{N}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{N}^T + (h_1 - \tau_1(t))e^{-\alpha h_1}\mathbf{M}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{M}^T + \\
 & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{O}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{O}^T \leq \boldsymbol{\Delta} + h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{N}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{N}^T + h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{M}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{M}^T + \\
 & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{O}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{O}^T = \boldsymbol{\Delta} + [\mathbf{N} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{O}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{Z}_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{Z}_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{Z}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \\ \mathbf{M}^T \\ \mathbf{O}^T \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ * & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ * & * & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ * & * & * & \Delta_{44} \end{bmatrix} \quad (51)$$

其中, $\Delta_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$ 定义于前述判据中, 利用 Schur 补引理对式(50)最右端进一步处理得:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta} & h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{N} & h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{M} & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{O} \\ * & h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ * & * & h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{Z}_1 & 0 \\ * & * & * & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

则式(50)最右端负定等价于 $\boldsymbol{\Phi}$ 负定, 从而保证 $\boldsymbol{\Phi}$ 负定。

2)同理对情况2时滞 $\tau(t) = \tau_2(t) \in (h_1, h_2]$, $\dot{V}_3(t) + \alpha V_3(t)$ 的后两项积分可写为:

$$\begin{aligned}
 & -\int_{t-h_1}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s)e^{\alpha(s-t)}\mathbf{Z}_1\dot{\mathbf{x}}(s)ds - \int_{t-\tau_2(t)}^{t-h_1} \dot{\mathbf{x}}^T(s)e^{\alpha(s-t)}\mathbf{Z}_2 \\
 & \dot{\mathbf{x}}(s)ds - \int_{t-h_2}^{t-\tau_2(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(s)e^{\alpha(s-t)}\mathbf{Z}_2\dot{\mathbf{x}}(s)ds \leq -e^{-\alpha h_1}\int_{t-h_1}^t \\
 & \dot{\mathbf{x}}^T(s)\mathbf{Z}_1\dot{\mathbf{x}}(s)ds - e^{-\alpha h_2}\int_{t-\tau_2(t)}^{t-h_1} \dot{\mathbf{x}}^T(s)\mathbf{Z}_2\dot{\mathbf{x}}(s)ds - e^{-\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-\tau_2(t)} \\
 & \dot{\mathbf{x}}^T(s)\mathbf{Z}_2\dot{\mathbf{x}}(s)ds
 \end{aligned} \quad (53)$$

对情况2引入向量:

$$\delta_2(t) = [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t-\tau_2(t)) \quad \mathbf{x}^T(t-h_1) \quad \mathbf{x}^T(t-h_2)]^T \quad (54)$$

为消除式(53)的3个积分项, 引入以下3组合适维数

的自由权矩阵:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 \\ \mathbf{S}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{T}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{bmatrix} \quad (55)$$

进行类似情况1的推导过程, 可得到:

$$\dot{V}(t) + \alpha V(t) \leq \delta_2^T(t)\boldsymbol{\Psi}\delta_2(t) \quad (56)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Psi} = & \boldsymbol{\Omega} + h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{S}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{S}^T + (\tau_2(t) - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{T}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{T}^T + \\
 & (h_2 - \tau_2(t))e^{-\alpha h_2}\mathbf{U}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{U}^T \leq \boldsymbol{\Omega} + h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{S}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{S}^T + \\
 & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{T}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{T}^T + (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{U}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{U}^T = \boldsymbol{\Omega} + [\mathbf{S} \quad \mathbf{T} \quad \mathbf{U}] \\
 & \begin{bmatrix} h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{Z}_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{Z}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{Z}_2^{-1} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{S}^T \\ \mathbf{T}^T \\ \mathbf{U}^T \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (57)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{11} & \boldsymbol{\Omega}_{12} & \boldsymbol{\Omega}_{13} & \boldsymbol{\Omega}_{14} \\ * & \boldsymbol{\Omega}_{22} & \boldsymbol{\Omega}_{23} & \boldsymbol{\Omega}_{24} \\ * & * & \boldsymbol{\Omega}_{33} & \boldsymbol{\Omega}_{34} \\ * & * & * & \boldsymbol{\Omega}_{44} \end{bmatrix} \quad (58)$$

其中, $\boldsymbol{\Omega}_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$ 定义于前述判据中, 利用 Schur 补引理对式(57)最右端进一步处理得:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{S} & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{T} & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{U} \\ * & h_1e^{-\alpha h_1}\mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ * & * & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{Z}_2 & 0 \\ * & * & * & (h_2 - h_1)e^{-\alpha h_2}\mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

则式(57)最右端负定等价于 $\boldsymbol{\Psi}$ 负定, 从而保证 $\boldsymbol{\Psi}$ 负定。

这样, 情况1和情况2的全部判据构成了保证时滞系统(18)指数稳定的充分条件, 证毕。

3 时滞系统稳定性判据应用

在2.2节的稳定判据中, $\boldsymbol{\Phi} < 0$ 和 $\boldsymbol{\Psi} < 0$ 是线性矩阵不等式(LMI), LMI问题可在MATLAB中调用LMI相关的函数来处理。仿真实验计算中采用的主要参数如下:

在双惯量系统中, 两惯量体的转动惯量和阻尼分别为 $J_i = 5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, b_i = 3 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}(i = 1, 2)$, 中间轴抗扭刚度 $K_s = 100 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ 和阻尼 $c_s = 0.1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$ 。为研究方便且不失研究方法的一般性, MATLAB仿真中不妨设定微分系数 $K_D = 0.0025$, 仅考虑PI参数的变化。根据获得的时滞稳定性分析判据条件,

给定指数衰减率 $\alpha = 0.2$, 时滞分割系数 $m = 2$, 计算在不同控制增益下保证系统(18)稳定的时滞上界 h_{\max} 最大值 (利用二分法保留 4 位小数)。

依据 2.2 节的稳定判据条件, 对时滞系统式(18)进行稳定性分析仿真。 h_{\max} 计算结果如表 1 所示(其中“-”代表

该组控制增益下, 应用 2.2 节的稳定判据无法判定系统式(18)是否稳定), 表 1 中第一行数据为积分系数 K_I 的取值。从表 1 可以得出, 对于双惯量时变时滞伺服电机传动系统式(18), 使时滞上界 h 最大(1.311 2 s)的最优控制增益大致在 $(K_P, K_I) = (0.02, 0.003)$ 处附近。

表 1 时滞闭环系统稳定的 h_{\max} 与控制增益的关系

Table 1 The relationship between h_{\max} and control gain for stable time-delay closed-loop systems

K_P	0.001	0.003	0.005	0.02	0.05	0.1	0.5
0.005	—	—	—	—	—	—	—
0.02	—	1.311 2	1.064 2	0.220 2	—	—	—
0.05	0.000 2	—	1.132 7	0.931 5	0.453 4	0.187 0	—
0.1	0.000 2	—	—	0.599 3	0.531 0	0.389 9	0.008 5
0.5	0.018 8	0.013 0	0.004 0	—	0.121 2	0.119 0	0.099 7
1	0.004 6	0.040 7	0.007 9	—	—	0.059 9	0.055 6

下面在不同控制增益下对系统式(18)状态 $x(t)$ 的稳定性进行 Simulink 验证。取初始状态为 $[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$, 指数稳定标准线(指数衰减线)的指数衰减率为 0.2, 生成的时变时滞在 $0 \sim 1.311 \ 2$ s 间按 MATLAB 的随机种子 0 变化, (K_P, K_I) 分别取为 $(0.02, 0.003)$ 、 $(0.05, 0.015)$ 和 $(0.02, 0.05)$, 观察负载端角速度状态的指数稳定性。搭建的系统 Simulink 框图如图 3 所示。

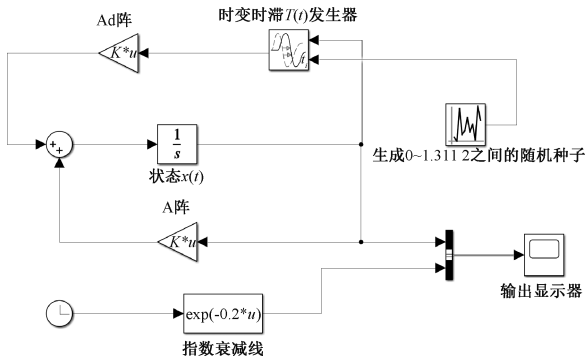


图 3 时滞闭环系统稳定性验证 Simulink 框图

Fig. 3 Simulink block diagram for stability validation of time-delay closed-loop systems

稳定性验证结果如图 4 所示。从图 4 中可以看出, 在 $(K_P, K_I) = (0.02, 0.003)$ 下, 时滞系统式(18)在 1 s 内很快稳定到 0 状态, 且稳定过程始终在指数衰减线以下, 说明该系统指数渐近稳定; 在 $(K_P, K_I) = (0.05, 0.15)$ 下,

系统式(18)出现失稳, 并在 6 s 左右开始出现高于指数衰减线的情况, 说明该系统不稳定; 在 $(K_P, K_I) = (0.02, 0.05)$ 下, 系统式(18)出现在平衡状态上下近似等幅波动, 并在 11 s 左右开始出现高于指数衰减线的情况, 说明该系统满足 Lyapunov 意义下稳定(即临界稳定)但不满足指数渐近稳定。后两者与使用 2.2 节的判据得出 (K_P, K_I) 分别在 $(0.05, 0.15)$ 和 $(0.02, 0.05)$ 时系统没有容许的时滞相对应。

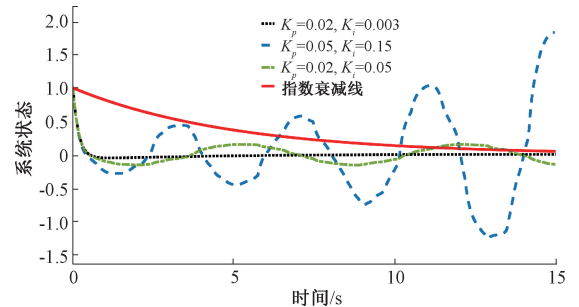


图 4 时滞闭环系统稳定性验证曲线

Fig. 4 Stability verification curves for time-delay closed-loop systems

表 2 不同时滞稳定判据下的 h_{\max} 结果对比

Table 2 Comparison of h_{\max} results under different time-delay stabilization criteria

时滞稳定判据	自由权矩阵	积分不等式	时滞分割	h_{\max} 结果	h_{\max} 结果优化率/%
参照判据	使用	未使用	未使用	0.891 4	0
文献[24]	使用	使用	未使用	1.115 8	25.17
本文判据	使用	使用	使用	1.632 8	83.17

若判据中仅保留自由权矩阵方法,而未使用积分不等式和时滞分割方法(以该判据为参照),则 h_{\max} 结果下降为 0.891 4。若判据中结合了自由权矩阵和积分不等式两种方法,但未使用时滞分割方法,该判据对应于文献[24]中的定理 3.1,则 h_{\max} 结果下降为 1.115 8。本文判据的 h_{\max} 结果比参照判据提高了 83.17%,比文献[24]判据提高了 46.33%,说明本文稳定判据具有更低的保守性。

4 结 论

本文充分考虑伺服电机传动系统存在的时变时滞,利用 Lyapunov 泛函分析法结合自由权矩阵、时滞分割、积分不等式等技术,获得了闭环系统时滞相关稳定判据。应用该判据,求出了保证系统稳定的控制增益适用时滞范围,验证了系统稳定性跟容许时滞上限有关,通过跟其他判据的对比得出了本文稳定判据具有更低的保守性。本文判据的低保守性能够显著增加系统稳定性分析的准确性,能够放宽伺服电机传动系统在传动、信号传输和信号检测等环节设计中的时滞指标要求,对更复杂的伺服电机传动系统设计、分析及控制具有借鉴意义。Lyapunov 泛函的选取和积分不等式界定对稳定判据的保守性有至关重要的影响,可能仍有改进空间。另外,针对伺服电机传动系统参数时变或不准确、存在多个时变时滞和复杂扰动等情况,未来可考虑深入开展更细致精准的系统建模、系统鲁棒稳定性分析以及 L_2 增益分析等。

参考文献

- [1] 赵志刚. 高精度伺服传动系统的传动误差分析及优化措施[J]. 工程机械文摘, 2024(2): 30-35.
ZHAO ZH G. Transmission error analysis and optimization measures of high-precision servo drive system[J]. Construction Machinery Digest, 2024(2): 30-35.
- [2] 徐宏, 傅景礼. 基于伺服电机驱动的进给传动系统扭转振动的 Lie 群分析方法[J]. 力学学报, 2023, 55(9): 2000-2009.
XU H, FU J L. Lie group analysis method for torsional vibration of feed drive system based on servo motor drive[J]. Journal of Mechanics, 2023, 55(9): 2000-2009.
- [3] 李小彭, 周赛男, 尹猛, 等. 双柔性机械臂伺服系统 PI 控制策略[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2023, 44(5): 642-650, 659.
LI X P, ZHOU S N, YIN M, et al. PI control strategy for servo system of dual flexible robotic arm[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science Edition), 2023, 44(5): 642-650, 659.
- [4] 李建, 王珍, 宋清玉. 重载伺服压力机主传动系统参数标定[J]. 锻压技术, 2022, 47(12): 148-153, 160.
LI J, WANG ZH, SONG Q Y. Parameter calibration of main drive system of heavy-duty servo press[J].

Forging and Pressing Technology, 2022, 47(12): 148-153, 160.

- [5] 柴凌云, 栾海英, 刘增元, 等. 阀控液压马达位置伺服系统长短时记忆神经网络预测抗扰反步控制[J]. 液压与气动, 2024, 48(8): 128-136.
CHAI L Y, LUAN H Y, LIU Z Y, et al. Predictive anti-jamming backstepping control of valve-controlled hydraulic motor position servo system with long and short-term memory neural network[J]. Hydraulics and Pneumatics, 2024, 48(8): 128-136.
- [6] 朱学利, 薛松, 冯宇, 等. 大口径射电望远镜伺服时滞因素分析及其预测补偿控制[J]. 电子机械工程, 2024, 40(3): 43-49.
ZHU X L, XUE S, FENG Y, et al. Analysis of servo time delay factors of large aperture radio telescope and its predictive compensation control[J]. Electronic and Mechanical Engineering, 2024, 40(3): 43-49.
- [7] 郭峻秀, 胡健, 姚建勇, 等. 考虑输入时滞的舵机伺服系统自适应指令滤波输出反馈控制[J]. 西安交通大学学报, 2024, 58(3): 149-161.
GUO J X, HU J, YAO J Y, et al. Adaptive command filtering output feedback control of servo system for rudder considering input time delay[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2024, 58(3): 149-161.
- [8] 杨光亮, 时军, 鲁文其, 等. 直线伺服系统时滞参数辨识与补偿研究[J]. 机械工程学报, 2018, 54(5): 193-201.
YANG L L, SHI J, LU W Q, et al. Research on time delay parameter identification and compensation of linear servo system [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(5): 193-201.
- [9] 吴春, 王超, 郑露华, 等. 基于锁相环型扩张状态观测器的双惯量弹性伺服系统机械谐振抑制方法[J]. 电工技术学报, 2024, 39(18): 5680-5691.
WU CH, WANG CH, ZHENG L H, et al. Mechanical resonance suppression method for dual-inertia elastic servo system based on phase-locked loop-type expanded state observer [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2024, 39(18): 5680-5691.
- [10] 陈子欢, 王永青. 单惯量伺服驱动系统参数辨识研究[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2023(10): 40-42, 48.
CHEN Z H, WANG Y Q. Research on parameter identification of single-inertia servo drive systems[J]. Modular Machine Tool & Automatic, 2023(10): 40-42, 48.
- [11] 钱宇阳, 杨开明, 朱煜. 自适应跑步机器人机跳跃交互稳定性分析与控制[J]. 仪器仪表学报, 2023, 44(1): 172-181.
QIAN Y Y, YANG K M, ZHU Y. Stability analysis and control of the jumping interaction in self-paced treadmills [J]. Chinese Journal of Scientific

- Instrument, 2023, 44(1): 172-181.
- [12] 刘雪梅, 吴庆林, 李洪文, 等. 基于大型光电设备应用的永磁同步电机性能测试分析[J]. 国外电子测量技术, 2024, 43(9): 149-154.
LIU X M, WU Q L, LI H W, et al. Analysis of permanent magnet synchronous motor performance test based on large-scale optoelectronic equipment application [J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2024, 43(9): 149-154.
- [13] 刘长杰, 王春阳, 王子硕, 等. 机载光电稳定平台模糊滑模自抗扰控制[J]. 电子测量技术, 2023, 46(19): 104-110.
LIU CH J, WANG CH Y, WANG Z SH, et al. Fuzzy sliding mode self-immunity control for airborne optoelectronic stabilization platform [J]. Electronic Measurement Technology, 2023, 46(19): 104-110.
- [14] 张路娟, 郭良栋. 一类具有两个加性时变时滞系统的稳定性分析[J]. 辽宁科技大学学报, 2022, 45(5): 379-384.
ZHANG L J, GUO L D. Stability analysis of a class of time-varying time-delay systems with two additivity[J]. Journal of Liaoning University of Science and Technology, 2022, 45(5): 379-384.
- [15] 时维国, 唐志瑶. 非线性网络控制系统的双通道时延和丢包鲁棒 H_∞ 控制[J]. 电子测量技术, 2021, 44(1): 7-14.
SHI W G, TANG ZH Y. Robust H_∞ control of two-channel delay and packet loss for nonlinear network control systems [J]. Electronic Measurement Technology, 2021, 44(1): 7-14.
- [16] ZHANG X M, HAN Q L, SEURET A, et al. Overview of recent advances in stability of linear systems with time-varying delays [J]. IET Control Theory & Applications, 2019, 13(1): 1-16.
- [17] CHEN J, PARK J H, XU SH Y. Stability analysis for neural networks with time-varying delay via improved techniques [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 49(12): 4495-4500.
- [18] 丁力, 刘晨, 刘小峰, 等. 系留式四旋翼无人机起降时的运动稳定性分析[J]. 仪器仪表学报, 2020, 41(9): 70-78.
DING L, LIU CH, LIU X F, et al. Kinematic stability analysis of the tethered unmanned aerial vehicle quadrotor during take-off and landing [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2020, 41(9): 70-78.
- [19] 刘金琨, 刘志杰. 基于 LMI 的控制系统设计、分析及 MATLAB 仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2020: 1-5.
LIU J K, LIU ZH J. LMI-based control system design, analysis and MATLAB simulation [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2020: 1-5.
- [20] 易奎辰, 曾红兵, 梁津铭, 等. 考虑时滞的自平衡车控制系统稳定性分析[J]. 湖南工业大学学报, 2024, 38(2): 33-40.
YI K CH, ZENG H B, LIANG J M, et al. Stability analysis of self-balancing vehicle control system considering time delay [J]. Journal of Hunan University of Technology, 2024, 38(2): 33-40.
- [21] 郭良栋, 张旺. 基于积分不等式的多时滞电力系统稳定性分析[J]. 辽宁科技大学学报, 2021, 44(6): 470-476.
GUO L D, ZHANG W. Stability analysis of multi-time delay power system based on integral inequality [J]. Journal of Liaoning University of Science and Technology, 2021, 44(6): 470-476.
- [22] 李旭. 基于切换方法的时滞系统稳定性分析与控制[D]. 大连: 大连理工大学, 2018.
LI X. Stability analysis and control of time-lagged system based on switching method[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2018.
- [23] 李晓萌. 电力系统用户端调控中的时滞小扰动稳定性及其研究[D]. 天津: 天津大学, 2018.
LI X M. Stability of time-lagged small disturbances in power system user-side regulation and its research [D]. Tianjin: Tianjin University, 2018.
- [24] 张传科. 时滞电力系统的小扰动稳定分析与负荷频率控制[D]. 长沙: 中南大学, 2013.
ZHANG CH K. Small disturbance stability analysis and load frequency control of time-delay power systems [D]. Changsha: Central South University, 2013.
- [25] 李宁, 周子豪, 李忠献. 基于时滞追踪的实时混合试验自适应补偿方法[J]. 工程力学, 2019, 36(7): 38-47.
LI N, ZHOU Z H, LI ZH X. A real-time hybrid test adaptive compensation method based on time-delay tracking [J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(7): 38-47.
- [26] 郭建国, 郭宗易, 赵金龙. 现代鲁棒控制理论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2021.
GUO J G, GUO Z Y, ZHAO J L. Modern robust control theory [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2021.

作者简介

陈子欢, 硕士, 研究实习员, 主要研究方向为机电系统控制理论与应用。

E-mail: ErickChan123@163.com

周占民, 博士, 副研究员, 主要研究方向为伺服控制。

E-mail: 405932@qq.com

王鑫, 博士, 助理研究员, 主要研究方向为视觉伺服。

E-mail: 14s104020@hit.edu.cn

于齐(通信作者), 硕士, 研究实习员, 主要研究方向为伺服控制、深度学习。

E-mail: 1933435625@qq.com

李旭, 博士, 副教授, 主要研究方向为系统控制理论与应用。

E-mail: imlixu@dlut.edu.cn