

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2415730

## 面向任务的CMM圆度测量不确定度建模与优化\*

程杰<sup>1</sup> 沙跃兵<sup>2</sup> 周易明<sup>2,3</sup> 程银宝<sup>3</sup>(1. 中国人民解放军海军士官学校 蚌埠 233010; 2. 浙江省计量科学研究所 杭州 310063;  
3. 中国计量大学 杭州 310018)

**摘要:** 精密仪器正趋向于智能化以及功能多样化发展,评估精密仪器的测量不确定度因此也变得更加复杂。以CMM中的圆度测量为例,以面向任务的不确定度评定方法,实现快速、可靠地评估出CMM测量任务的不确定度。根据误差传播的实际情况,结合计算机模拟的蒙特卡洛方法,提出了一种误差分布多状态下的不确定度代数和合成方法。针对测量不确定度初次评定存在过量估计的问题,提出了优化评估方案。给出圆度测量任务的不确定度评定与优化实例,验证评定模型和优化方法的可行性与有效性。系统性解决CMM面向任务的不确定度评定难题,对于解决其他高精度仪器测量结果的不确定度评估、提高仪器的实际使用价值,均具有重要参考意义。

**关键词:** 坐标测量机;精度;测量不确定度;数学模型;优化估计

**中图分类号:** TN06; TB92 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 410.55

## Modeling and optimization of task oriented uncertainty for CMM

Cheng Jie<sup>1</sup> Sha Yuebing<sup>2</sup> Zhou Yiming<sup>2,3</sup> Cheng Yinbao<sup>3</sup>(1. Naval Petty Officer Academy of PLA, Bengbu 233010, China; 2. Zhejiang Institute of Metrology, Hangzhou 310063, China;  
3. China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** Precision instruments are tending towards intelligence and diversified functions, making the evaluation of measurement uncertainty in precision instruments more complex. Taking roundness measurement in CMM as an example, a task-oriented uncertainty evaluation method is used to quickly and reliably evaluate the uncertainty of CMM measurement tasks. Based on the actual situation of error propagation and combined with the Monte Carlo method of computer simulation, a method for algebraic sum synthesis of uncertainty under multiple states of error distribution is proposed. Aiming at the problem of overestimation in the initial evaluation of measurement uncertainty, an optimized evaluation scheme is proposed. Provide an example of uncertainty evaluation and optimization for roundness measurement tasks to verify the feasibility and effectiveness of the evaluation model and optimization methods. Systematically solving the uncertainty evaluation problem of CMM task oriented has important reference significance for solving the uncertainty evaluation of other high-precision instrument measurement results and improving the practical use value of the instrument.

**Keywords:** coordinate measuring machines; precision; measurement uncertainty; mathematical model; optimization estimation

## 0 引言

坐标测量技术在武器装备制造、航空航天、汽车模具等现代工业制造领域应用广泛。坐标测量机(coordinate measuring machines, CMM)的出现,从本质上改变了几何量测量不能数字化的问题,将几何量测量从传统的比较模式转换为坐标测量模式<sup>[1-3]</sup>。研发、设计、加工、测量、验收、使用、维修、报废等过程须依据产品几何量技术规范

(geometrical product specification, GPS)标准体系,CMM在GPS指导下发挥作用<sup>[4-7]</sup>,尤其武器装备的可靠性要求更高,其加工制造过程中已离不开CMM提供准确、可靠的测试数据,对设计、加工以及维修做出更加有效的指导。

自《测量不确定度的评定与表示指南》(guide to the expression of uncertainty in measurement, GUM)发布并实施以来,经历了超过30年的发展和实际应用,用测量不确定度来描述测量结果的精确度,已经获得了学术领域的

收稿日期:2024-03-28

\* 基金项目:浙江省产学研合作协同育人项目、浙江自然科学基金(LY22E050005)项目资助

广泛认同。这一进展象征着测量学中,传统的误差观念已被测量不确定度概念所更新<sup>[8-10]</sup>。CMM 结合了机械工程、光学、电子技术、计算机科学以及控制理论的先进成果,形成了一个高效且功能丰富的精密测量工具<sup>[11-12]</sup>。其测量范围远超传统的专用测量设备,这导致了其机械结构的复杂性显著提高。正因如此,评估 CMM 的测量不确定度成了一个充满挑战的任务,国内外不少学者也在该领域取得了一些进展。Du 等<sup>[13]</sup>提出了一种基于误差椭圆理论和蒙特卡罗模拟方法的三坐标测量不确定度评估方法,该方法可以减少重复测量次数,且对操作者的经验要求不高。Płowucha 等<sup>[14]</sup>介绍了一种仅通过 B 类评估方法进行坐标测量不确定度评估的理论背景,并给出了最大长度测量误差公式以及不确定度评定示例。Zhang 等<sup>[15]</sup>提出了一种用于评估圆度误差不确定性的贝叶斯动力学模型,其结果与 ISO 标准方法相比,表明该模型可以正确有效且稳定地评估动态不确定度。Miroslaw 等<sup>[16]</sup>介绍了一种用于验证 CMM 的不确定度评估结果的灵敏度分析方法。中国计量科学研究院位恒政等<sup>[17]</sup>针对 CMM 校准方法及不确定度评估问题展开了研究。北京工业大学张敏等<sup>[18]</sup>在 GPS 指导下进行了 CMM 具体测量任务的不确定度评定方法的研究,研究重点主要在于如何将非理想表面模型以离散数学的方法表达出来。

针对 CMM 面向圆度测量任务不确定度建模与优化问题,给出 2 种不确定度合成方法。为了应对过量估计不确定度的问题,提出了一套优化的不确定度分量评估策略。这种方法在确保测量数据的精准性和可信度的前提下,显著增强了 CMM 的实用价值和应用效能。

## 1 不确定度分析与建模

测量过程中诸多因素都会对测量结果的精度带来影响,主要的不确定度来源有:1)“仪器”引入的不确定度:主要涉及 CMM 的几何误差和探头系统误差,这些误差对测试结果产生影响<sup>[19]</sup>;在具体的测量作业中,最大允许示值误差(maximum permissible enable error,  $MPE_E$ )与距离及其他尺寸错误紧密相关。另外,最大允许探测误差(maximum permissible probing error,  $MPE_P$ )则涉及到在一个非常小的测量范围内,整个测量系统可能出现的误差,通常这会影响到形状的测量结果;2)“对象”引入的不确定度:主要涉及与待测物的几何形状和物理特性有关,这些特性均可能会对结果产生影响;3)“人”引入的不确定度:主要来自于测量人员对标准的不同诠释,这导致了测量方法的多样性。这些方法的差别通常体现在固定和定位、坐标系的设立、采样方式以及测头设置等方面;4)“方法”引入的不确定度:不同测量方法和策略的重复性测量结果之间的一致性;5)“环境”引入的不确定度:温度、振动等环境因素的影响。

在制造领域实施的测量系统分析(measurement

system analysis, MSA)技术,采取了一种系统化的视角,提出了 6 个关键指标来描述测量系统的量化统计特征:重复性、复现性、分辨率、稳定性、偏差和线性。本文将基于这个框架来探讨测量系统的不确定性分析与模型构建问题。如表 1 所示,6 个指标从测量结果的统计特征出发,用以表征测量系统的精确性。

表 1 测量结果的量值统计指标

指标名称	符号	误差来源及性质
重复性	$\delta_r$	测量条件不变时的随机性误差
复现性	$\delta_R$	测量条件变化时的随机性误差
分辨力	$\delta_d$	分辨力不足导致的随机性误差
稳定性	$\delta_s$	短期时间效应导致的随机性误差
偏倚 线性	$\epsilon_E$	测量系统自身系统性误差的综合影响

这些指标本质上揭示了不同误差来源对测量结果不确定度的影响,因而可以利用这 6 项指标作为不确定度的来源,以构建一个简化的不确定度分析模型:

$$Y = y + \max[\delta_r, \delta_d] + \delta_R + \delta_s + \epsilon_E \quad (1)$$

式中:Y 为被测量;y 为被测量的测量值。

测量的重复性与分辨力之间有一定的联系,在进行不确定度评估时,只需关注两者中较大的值。在对测量系统的基本误差源了解不充分的情况下,通过误差溯源来分析不确定度的来源可能会遇到困难。此时,依托于量值统计分析的方法来构建不确定度模型,可以有效地解决测量对象的不确定度评估问题。由式(1)所得的简化的不确定度传递模型,既简便易用,又能满足测量不确定度评定的简洁性、速度和实用性要求。基于这一理念,下面对 CMM 面向特定任务的不确定度来源进行分析:

1)对 CMM 的测量结果而言,偏倚和线性误差主要通过引入的示值误差或探测误差增加了测量的不确定度分量  $u_E$ 。这类影响可以通过 CMM 的  $MPE_E$  和  $MPE_P$  进行评估。在校准 CMM 时,考虑了多种因素对测量精度的影响,包括测量头的配置、坐标系统的设定、被测对象的定位方式、其在空间中的位置及环境条件等。因此,通过  $MPE_E$  和  $MPE_P$  的量化分析,实际上也反映了这些不同不确定性来源的综合影响。

2)CMM 的仪器分辨力通常优于  $0.1 \mu\text{m}$ ,因此,在评估不确定度时,只用关注由重复性引入的不确定度分量  $u_r$  即可。电子测量仪器中,仪器的稳定性指标通常具有较大的影响,但由实验验证得知,在 CMM 测量过程中,稳定性的影响相对较小。因此,在进行不确定度评估时,可以忽略分辨力和稳定性引入的不确定度分量。

3)复现性引入的不确定度分量  $u_R$  反映了在改变测量条件时,对同一个对象的测量结果的一致性变化,例如由不同操作人员或测量策略变化所引起的测量结果的平均值变

化。为了量化这种不确定性,可以通过进行复现性试验来评估其影响。对于 CMM 来说,这通常包括让多位操作员根据自己的习惯选择测量点,以执行多组测量实验。

因此,CMM 面向任务的测量不确定度分析模型为:

$$Y = y + \delta_E + \delta_r + \delta_R \quad (2)$$

基于 GUM 方差合成定理,由式(2)得:

$$u_c = \sqrt{u_E^2 + u_r^2 + u_R^2} \quad (3)$$

## 2 蒙特卡洛法不确定度合成模型

蒙特卡洛法(monte carlo method, MCM)是基于概率统计学的原理,并采用计算机模拟抽样作为其主要技术,通过随机数来进行统计实验,从而得到统计上的特征值。不失一般性,不考虑测量结果的修正模型,测量模型表达式为:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4)$$

式中: $y$  为输出量,表示被测对象的测量值; $x_i$  为输入量,表示直接测量参数的测量值, $i=1,2,\dots,n$ 。

多元函数的增量可由其全微分表示,则有:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (5)$$

鉴于各种输入量  $x_i$  的误差  $\Delta_i$  通常都相对较小,所以当本文已经知道这些输入量  $x_i$  的误差时,可以考虑使用误差值  $\Delta_i$  代替式(5)中的微分部分  $dx_i$ , 即有:

$$\Delta_y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta_n \quad (6)$$

如式(6)所示的误差合成方法被称为代数和法,在这个公式中,所有误差的数值大小和符号的正负都已经确定。

在进行任何形式的测量时,系统误差和随机误差都是不可避免的,这会导致被测量  $Y$  的测量值  $y$  与其实际值  $y_0$  之间出现偏差。总误差  $\Delta_y$  实际上是由系统误差  $\epsilon$  与随机误差  $\delta$  的综合结果所组成的,即  $\Delta_y = \delta + \epsilon$ 。则有:

$$y = y_0 + \Delta_y \quad (7)$$

被测得的真值  $y_0$  虽然是一个未知的数值,但其数值是固定的,因此它可以被视为一个常量,则有:

$$\sigma(y) = \sigma(\Delta_y) \quad (8)$$

很明显,测量值  $y$  的变化范围与其测量误差  $\Delta_y$  的变化范围是一致的,因此,基于标准不确定度定义可知:

$$u(y) = u(\Delta_y) \quad (9)$$

由于存在真值不明确和测量次数受限的问题,无法准确地确定测量误差的确切数值,因此,误差应被视为一个随机变量来处理。为了描述误差如何影响测量结果,利用统计分布的方法进行合成,这种合成方法结合了方和根法,利用此方法,可以确定输出量的统计分布的标准偏差。如果已经知道误差的统计分布,那么基于 MCM 的核心理念,对每个输入量  $x_i$  的误差(这个误差已经被随机化,并且其统计分布是已知的)进行  $M$  次随机选择,这意味着每个输入量  $x_i$  都会得到  $M$  个误差值,如式(10)所示。

$$\begin{cases} x_1: \Delta x_{11}, \Delta x_{12}, \dots, \Delta x_{1M} \\ \vdots \\ x_i: \Delta x_{i1}, \Delta x_{i2}, \dots, \Delta x_{iM} \\ \vdots \\ x_n: \Delta x_{n1}, \Delta x_{n2}, \dots, \Delta x_{nM} \end{cases} \quad (10)$$

随后,此前被认为是随机的误差值  $\Delta x_i$  被具体化为  $M$  个带有确定符号和具体数值的量。通过应用式(6),可以明确地计算出  $M$  个具有确切符号和数值的输出误差  $\Delta_y$ , 如式(11)所示。

$$\begin{cases} \Delta_{y1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{11} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{21} \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_{n1} \\ \vdots \\ \Delta_{yi} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2i} \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_{ni} \\ \vdots \\ \Delta_{yM} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1M} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2M} \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_{nM} \end{cases} \quad (11)$$

将  $M$  个输出量  $y$  的误差值  $\Delta_y$  利用 Bessel 公式计算出样本标准差,可推导出测量系统输出量  $Y$  的标准不确定度模型:

$$u(y) = u(\Delta_y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (\Delta_{yi} - \bar{\Delta}_y)^2}{M-1}} \quad (12)$$

得到  $M$  个误差值  $\Delta_y$  的统计分布,通过误差分布图结合对应的置信概率来计算标准不确定度和扩展不确定度的包含区间。

## 3 圆度测量的不确定度模型

圆度是一种典型的形状误差,指的是被测对象的实际形状与其理想形状之间的偏差量。虽然形状误差的精确测量并不是 CMM 的强项,特别是当与专门测量形状公差的仪器,如圆度仪、自准直仪、水平仪等相比时,CMM 在测量精度上可能略有不足。然而,CMM 的多功能性显著增强了测量的整体效率。因此,在使用 CMM 进行形状测量时,应当考虑到测量机的能力是否与测量任务相匹配。

形状的测量关注于在极小的测试空间内的相对变化,并且在示值误差分析中,线性影响通常可以忽略不计。CMM 的测量精度,即对形状的探测能力,通过最大允许探测误差  $MPE_p$  来衡量,并由标准球体的圆度用于校正。采用  $MPE_p$  来评估 CMM 在测量形状参数时由于仪器偏差所引入的标准不确定度,这种方法的可靠性较高,其量化公式如式(13)所示。

$$u_E = \frac{MPE_p}{\sqrt{3}} \quad (13)$$

重复性条件下对被测对象进行  $n$  次独立测量,由 Bessel 公式得单次测量的实验室标准偏差如式(14)所示。

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (14)$$

式中:  $y_i$  表示第  $i$  次测量值,  $\bar{y}$  为测量列的算术平均值。

$N$  次测量的算术平均值作为测量最佳估计值时,则重复性引入的标准不确定度  $u_r$  为:

$$u_r = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(n-1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (15)$$

当多位测量人员按照个人习惯选择不同的测头配置,并在标准实验室条件下制定各自的测量方案时,他们会对目标进行多达  $m$  次重复实验。每组实验的平均测量结果  $\bar{y}_j$  构成一个独立的数据序列。设这些序列的算数平均值为  $\bar{\bar{y}}$ , 那么由测量复现性引起的标准不确定度  $u_R$  可以表示为:

$$u_R = \sqrt{\frac{1}{(m-1)} \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2} \quad (16)$$

根据式(3)可得出CMM形状测量任务的不确定度评定的普适性模型为:

$$u_c = \sqrt{\frac{MPE_p^2}{3} + \frac{1}{N(n-1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + \frac{1}{(m-1)} \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2} \quad (17)$$

#### 4 不确定度优化方法

确定测量任务后,为满足精度需求,必须谨慎选择适合的测量仪器和方法。在检测机械量参数时,测量的不确定度需严格控制在公差值的33%以下<sup>[20]</sup>。借鉴最新一代GPS的理念,设计了一套专为特定测量任务量身定制的不确定度管理方案,如图1所示。该方案精准定义了测量任务的范围、所需条件、采用方法以及其他所有影响测量流程的要素,旨在通过精确估计测量过程中的不确定度,剔除不合理或者对测量结果影响较大的分量,重新优化方案,以实现最优的测量结果。

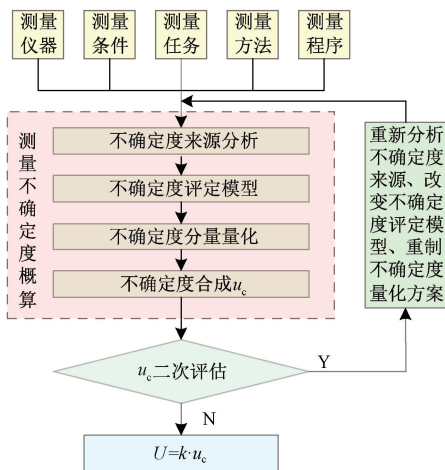


图1 测量不确定度管理程序

通过初步分析测量的不确定度,可以识别出影响最大的不确定度因素。针对这些关键因素,制定一个更符合实

际的量化方案,旨在降低对不确定度的过估计。然而,针对这些主要不确定度因素进行进一步的精细化优化,可能会增加测量的时间与经济成本。评估团队需要根据实际测量需求进行恰当的调节和精化。本部分讨论的不确定度优化主要关注于由坐标测量机的示值误差和由复现性引起的不确定度。

示值误差所带来的不确定度应依据测量设备允许的最大误差范围,也就是通过误差限来估计。在进行二次精确评估时,应选择与被测对象尺寸接近的、经过溯源的标准器具或工件进行示值误差的校正,从而得到更为准确的示值误差边界估计。例如,表2显示了利用校准误差可以忽略不计的100 mm标准量块和标准球,对Zeiss MC850型坐标测量机按  $MPP_E = (2.9 + 4L/1000) \mu\text{m}$  和  $MPE_p = 3.0 \mu\text{m}$  进行的校正结果。

表2 CMM示值误差与探测误差的标定结果

误差来源	误差限/ $\mu\text{m}$	不确定度分量/ $\mu\text{m}$
$MPP_E$	3.3	1.91
$E$	2.0	1.15
$MPE_p$	3.0	1.732
$P$	1.6	0.924

重复性引入的不确定度分量通常是依据贝塞尔法或极差法等公式计算得到,但一次实验过程反映仪器状态的数据有限,无限增加测量次数会降低测量效率,同一条件下的测量数据服从正态分布,可采用共轭贝叶斯方法对A类不确定度分量进行优化。

多次测量数据为  $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ ,  $Y \sim N(\theta, \sigma^2)$ , 单次测量重复性引入的标准不确定度如式(15)所示。若第1次重复性实验的测量次数为  $n_0$ , 根据共轭贝叶斯不确定度评定方法<sup>[21]</sup>,  $\sigma^2$  的共轭先验分布为:

$$\pi(\sigma^2) = \frac{\sqrt{S_0^{n_0-1}}}{\sqrt{2^{n_0-1}} \Gamma(\frac{n_0-1}{2})} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n_0+1}{2}} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n_0+1}{2}} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \quad (18)$$

此时的重复性实验的不确定度分量如式(19)所示。

$$u_0 = \sqrt{\frac{S_0}{n_0-1}} \quad (19)$$

设再次进行的重复性实验次数为  $n_1$ , 利用后续新增的测量数据对  $\sigma^2$  进行更新,似然函数如式(20)所示。

$$l(\sigma^2 | x) \propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \exp\left(-\frac{S_1}{2\sigma^2}\right) \quad (20)$$

$\sigma^2$  后验分布的概率密度函数为:

$$\pi(\sigma^2 | x) \propto \pi(\sigma^2) l(\sigma^2 | x) \propto (\sigma^2)^{-\frac{n_0+n_1-1}{2}-1} \exp\left(-\frac{S_0+S_1}{2\sigma^2}\right)$$

$$\pi(\sigma^2 | x) \sim \Gamma^{-1}\left(\frac{n_0+n_1-1}{2}, \frac{S_0+S_1}{2\sigma^2}\right)$$

则更新后的 A 类标准不确定度如式(21)所示。

$$u_1 = \sqrt{\frac{S_0 + S_1}{n_0 + n_1 - 3}} \quad (21)$$

测量重复性引入的标准不确定度实时评定如式(22)所示。

$$u_1 = \sqrt{\frac{(n_0 - 1)u_0^2 + \sum_{j=1}^{n_1} (x_{1j} - \bar{x}_1)^2}{n_0 + n_1 - 3}} \quad (22)$$

复现性导致的标准不确定度取决于操作人员之间的执行差异。如果复现性不确定度较高,这表明操作者的具体测量操作对结果有着重要的影响,可以通过对测量人员进行科学、规范的培训和指导,针对常规测量任务制定相应的标准化测量策略和程序,以提高测量结果的一致性。

### 5 不确定度评定实例

实验采用德国 Zeiss 的 MC850 型 CMM 对某型号机载雷达零部件圆度进行测量,圆度公差值要求是 0.015 mm。实验如图 2 所示。CMM 的最大允许示值误差和最大允许探测误差分别为:

$$MPE_E = A + B \cdot L = (2.9 + L/250)\mu\text{m} \quad (23)$$

$$MPE_P = 3 \mu\text{m} \quad (24)$$



图 2 测量实验

#### 5.1 不确定度概算

根据式(13)可计算示值误差引入的标准不确定度为:

$$u_E = \frac{MPE_P}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = 1.732 \mu\text{m} \quad (25)$$

对被测零件进行 10 次重复测量,实验数据如表 3 所示,计算重复性实验的单个数据的标准差为:

$$S_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n - 1)}} = 1.497 \mu\text{m} \quad (26)$$

表 3 圆度重复测量数据

测量次数	1	2	3	4	5
测量值 $x_i/\mu\text{m}$	7.2	8.9	9.8	10.2	9.1
测量次数	6	7	8	9	10
测量值 $x_i/\mu\text{m}$	9.7	8.8	11.3	7.1	11.6

为降低测量过程中随机效应的影响,圆度测量估计值的结果由 3 次测量结果的平均值作为,故由重复性引入的标准不确定度为:

$$u_r = \frac{S_r}{\sqrt{3}} = 0.864 \mu\text{m} \quad (27)$$

由 3 名具有专业测量知识背景和熟练操作经验的测量员,根据其各自的测量习惯独立各进行了 3 轮重复实验。为了确保实验的差异性,采样策略和测量起点等因素尽量保持不同。复现性的实验数据如表 4 所示,复现性测量的总体平均值如式(28)所示。

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^9 \bar{x}_j}{9} = 9.533 \mu\text{m} \quad (28)$$

表 4 圆度复现性测量数据

测量人员的 3 次重复实验平均值 $\bar{x}_j$	测量人员 A	测量人员 B	测量人员 C
第 I 组	7.3	8.1	11.5
第 II 组	7.8	9.9	11.8
第 III 组	7.3	10.2	11.9

注:  $\bar{x}_j$  表示第 j 组复现性实验的测量平均值。

根据式(16)可得由圆度测量复现性引入的标准不确定度为:

$$u_R = \sqrt{\frac{1}{(9 - 1)} \sum_{j=1}^9 (\bar{x}_j - \bar{x})^2} = 1.944 \mu\text{m} \quad (29)$$

则机载雷达零件圆度测量任务的测量不确定度分量如表 5 所示。

表 5 不确定度分量概算

标准不确定度分量	不确定度来源	评定结果/ $\mu\text{m}$
$u_E$	示值误差	1.732
$u_r$	重复性	0.864
$u_R$	复现性	1.944

按照式(3)所示的方差合成定理的方法可计算出 CMM 圆度测量任务的合成标准不确定度为:

$$u_c = \sqrt{u_E^2 + u_r^2 + u_R^2} = 2.743 \mu\text{m} \quad (30)$$

取  $p = 95\%$ ,  $k = 2$ , 则扩展不确定度为:

$$U = k \cdot u_c = 5.5 \mu\text{m} \quad (31)$$

#### 5.2 实验结果分析

设定仪器示值误差  $\delta_E$  是分布区间在  $[-3 \mu\text{m}, 3 \mu\text{m}]$  的均匀分布;由重复性  $\delta_r$  引入的不确定度是期望参数为 0, 标准差参数为  $0.864 \mu\text{m}$  的正态分布;而由复现性  $\delta_R$  引入的不确定度是期望参数为 0, 标准差参数为  $1.944 \mu\text{m}$  的正态分布。利用某数据处理软件对  $\delta_E, \delta_r, \delta_R$  各随机抽样  $10^6$  次,将  $\delta_E, \delta_r, \delta_R$  抽样值代数和相加,得到  $10^6$  个圆度测量误

差  $\Delta x_i$  样本值,按照式(12)计算合成标准不确定度  $u_c = 2.7409 \mu\text{m}$ 。绘制  $\Delta x = \delta_E + \delta_r + \delta_R$  分布直方图如图 3 所示。

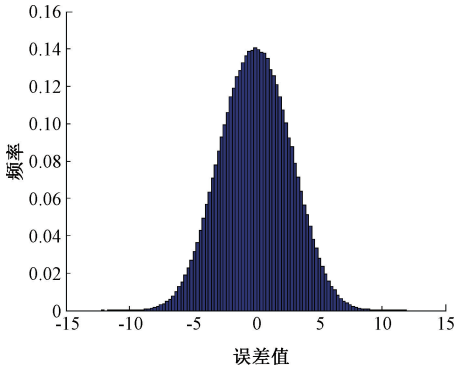


图 3 Matlab 模拟的圆度测量误差统计直方图

可以得到包含概率  $p=95\%$  时的包含区间为  $[-5.3411, 5.2787]$ , 则扩展不确定度为:

$$U = 5.3 \mu\text{m}, k = 1.94 \quad (32)$$

同时,计算出正态分布标准差对应包含概率 68.27% 的包含区间为  $[-2.7471, 2.8409]$ , 该区间的标准不确定度为  $2.794 \mu\text{m}$  大于  $u_c = 2.74 \mu\text{m}$ 。2 种方法计算的不确定度比较如表 6 所示。

表 6 圆度测量不确定度结果比较

不确定度信息	GUM 合成方法	MCM 合成方法
标准不确定度 $u_c$	$2.743 \mu\text{m}$	$2.7409 \mu\text{m}$
	$p=68.27\%$	$p=62.75\%$
扩展不确定度	$5.5 \mu\text{m}$	$5.3 \mu\text{m}$
$U(p=95\%)$	$k=2$	$k=1.94$

### 5.3 不确定度优化

经由表 2 中已经标定的探测误差  $P = 1.6 \mu\text{m}$  替代  $MPE_p$  作为示值误差的极限值,则在圆度测量过程中由仪器示值误差引入的不确定度分量为:

$$u'_E = \frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{1.6}{\sqrt{3}} = 0.924 \mu\text{m} \quad (33)$$

将式(27)作为先验测量数据,测量次数为  $n_0 = 10$ 。后续重复测量了 1 组实验,数据如表 7 所示。

表 7 后续的重复性测量数据

均值 $\bar{t}_i / \mu\text{m}$	$n_1$	标准差 $/ \mu\text{m}$	$u_r / \mu\text{m}$
9.4	10	1.387	0.8001

将表 7 数据带入式(22),可得到重复性测量数据的实时更新不确定度评定结果为:

$$u_1 = \sqrt{\frac{(n_0 - 1)u_0^2 + \sum_{j=1}^{n_1} (x_{1j} - \bar{x}_1)^2}{n_0 + n_1 - 3}} = 0.758 \mu\text{m} \quad (34)$$

优化评估时通过规范采样点分布为 8 个在空间上均匀分布的采样点,并统一利用 4 mm 测头和 20 mm 测杆进行测量,故经优化实验方案后复现性实验数据如表 8 所示,则:

$$u'_R = \sqrt{\frac{1}{(9-1)} \sum_{j=1}^9 (\bar{x}_j - \bar{x})^2} = 1.198 \mu\text{m} \quad (35)$$

表 8 优化评估的圆度复现性测量数据  $\mu\text{m}$

测量人员的 3 次重复 实验平均值 $\bar{x}'_j$	测量 人员 A	测量 人员 B	测量 人员 C
第 I 组	7.4	8.8	10.2
第 II 组	8.2	9.2	10.8
第 III 组	7.8	9.8	10.8

通过优化实验方案,复现性引入的标准不确定度由  $1.944 \mu\text{m}$  降低为  $u'_R = 1.198 \mu\text{m}$ 。优化后的不确定度概算如表 9 所示。

表 9 优化评估的不确定度分量概算

标准不确定度分量	不确定度来源	评定结果 $/ \mu\text{m}$
$u_E$	示值误差	0.924
$u_r$	重复性	0.758
$u_R$	复现性	1.198

首次评估与优化评估的不确定度对比如图 4 所示。可以看出,在首次评估中,圆度测量的扩展不确定度未达到目标不确定度  $U_0 = 5 \mu\text{m}$  的标准,但通过优化评估,圆度测量的扩展不确定度最终符合了精度要求。

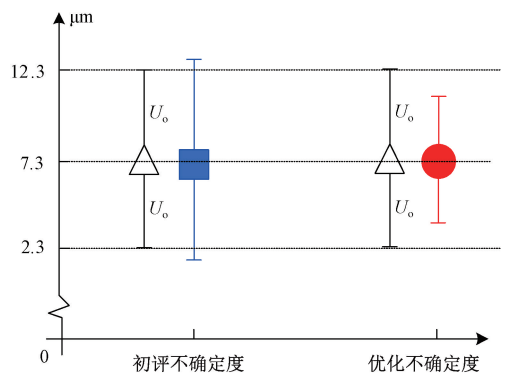


图 4 优化评估前后的不确定度对比

## 6 结 论

解决了 CMM 面向圆度任务的测量不确定度评定问题,基于 MSA 思想提出了 CMM 面向圆度测量的不确定度建模方法。对比两种方法实验结果可知:根据 GUM 假设输出量呈正态分布,其合成标准不确定度的包含概率为 68.27%,然而,使用 MCM 方法得到的标准不确定度的包

含概率仅为 62.75%。这表明,GUM 基于正态分布的假设可能导致对扩展不确定度的评估相比实际情况过高约 4%。

## 参考文献

- [1] CHENG Y, WANG Z, CHEN X, et al. Evaluation and optimization of task-oriented measurement uncertainty for coordinate measuring machines based on geometrical product specifications [J]. Applied Sciences, 2019, 9(1): 6.
- [2] D'AMATO R, CAJA J, MARESCA P, et al. Use of coordinate measuring machine to measure angles by geometric characterization of perpendicular planes. Estimating uncertainty [J]. Measurement, 2014, 47(1): 598-606.
- [3] SATO O, ABE M, TAKATSUJI T. Coordinate-based evaluation of two dimensional artefact calibration value as the reference standards for Coordinate Measuring Machines[J]. Mapan-Journal of Metrology Society of India, 2018, 33(3): 191-199.
- [4] CUESTA E, ALVAREZ B, SANCHEZ F, et al. A statistical approach to prediction of the CMM drift behaviour using a calibrated mechanical artefact[J]. Metrology & Measurement Systems, 2015, 22(3): 417-428.
- [5] ANAGNOSTAKIS D, RITCHIE J, LIM T, et al. Automated coordinate measuring machine inspection planning knowledge capture and formalization [J]. Journal of Computing & Information Science in Engineering, 2018, 18(3): 031005.
- [6] THALMANN R, MELI F, KUNG A. State of the art of tactile micro coordinate metrology [J]. Applied Sciences, 2016, 6(5): 150(1-13).
- [7] ALI S. State-of-the-art of CMM-coordinate metrology in automotive industry [C]. SAE Technical Paper, 2017, 1: 0397.
- [8] 关静宇, 王中宇, 李双. 手持式激光扫描仪测量不确定度的蒙特卡洛法评定[J]. 电子测量技术, 2021, 44(14): 72-76.
- [9] 张昌尧, 吴清锋, 张秋怡, 等. 工业机器人位置稳定时间不确定度的研究分析[J]. 电子测量技术, 2023, 46(8): 148-153.
- [10] 魏明明, 李芬. 二等铂电阻温度计标准装置校准结果的验证[J]. 电子测量技术, 2023, 46(19): 177-181.
- [11] DENG Z, LI S, HUANG X. A flexible and cost-effective compensation method for leveling using large-scale coordinate measuring machines and its application in aircraft digital assembly[J]. Measurement Science & Technology, 2018, 29(6): 065904.
- [12] ECHERFAOUI Y, OUAFI A, CHEBAK A. Experimental investigation of dynamic errors in coordinate measuring machines for high speed measurement [J]. International Journal of Precision Engineering & Manufacturing, 2018, 19(8): 1115-1124.
- [13] DU Z, ZHU M, WU Z, et al. Measurement uncertainty on the circular features in coordinate measurement system based on the error ellipse and Monte Carlo methods[J]. Measurement Science and Technology, 2016, 27(12): 125016-125016.
- [14] PŁOWUCHA W. Point-straight line distance as model for uncertainty evaluation of coordinate measurement [J]. Measurement, 2018, 135: 83-95.
- [15] ZHANG K, CHENG G, ZHANG W. Evaluation of roundness error uncertainty by a Bayesian dynamic model[J]. Measurement, 2020, 155: 107565-107565.
- [16] MIROŚLAW W, PAWEŁ R, WOJCIECH P, et al. Validation of the sensitivity analysis method of coordinate measurement uncertainty evaluation [J]. Measurement, 2022, 199(8): 111454.
- [17] 位恒政, 王为农, 裴丽梅, 等. 用于多传感器坐标测量机探测误差评价的薄环规标准器[J]. 光学精密工程, 2016, 24(3): 521-525.
- [18] 张敏, 姜海洋, 石照耀. 新一代 GPS 标准中非理想表面模型的建模方法[J]. 仪器仪表学报, 2016, 37(1): 91-98.
- [19] 张国雄. 三坐标测量机[M]. 天津: 天津大学出版社, 1999: 312-390.
- [20] GB/T 1958-2017, 产品几何技术规范(GPS) 几何公差检测与验证[S]. 北京: 中国标准出版社, 2017.
- [21] 姜瑞, 陈晓怀, 王汉斌, 等. 基于贝叶斯信息融合的测量不确定度评定与实时更新[J]. 计量学报, 2017, 38(1): 123-126.

## 作者简介

程杰, 硕士, 副教授, 主要研究方向为舰炮武器与检测技术。

E-mail: chjzhl1998@163.com

沙跃兵(通信作者), 硕士, 高级工程师, 主要研究方向为电子信息与计量技术。

E-mail: shaybing@163.com