数据采集及信号处理

电子测量技术
ELECTRONIC MEASUREMENT TECHNOLOGY

第47卷 第5期
2024年3月

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2415328

基于互质极化敏感阵列的参数降维估计算法

逯岩斌[1] 陈文东[2] 杨赟秀[3] 舒 勤[1]

(1.四川大学电气工程学院 成都 610065;2.北京遥感设备研究所 北京 100005;3.西南技术物理研究所 成都 610045)

摘 要: 针对互质极化敏感阵列波达方向角(DOA)和极化参数估计中存在的计算复杂度高以及多信源情况下DOA解模糊配对错误问题,本文提出了一种基于模值约束降维求根多重信号分类(MUSIC)的DOA和极化参数联合估计算法。首先通过重构三维谱函数,对DOA和极化参数进行解耦,实现三维MUSIC方法的降维,然后利用多项式求根求解出DOA,并利用波束形成方法解决了互质阵列中存在的解模糊角度错配问题,最后利用极化矢量的模值有界性构造代价函数,推导出极化参数的闭式解。数值仿真结果验证了所提算法的有效性,结果表明,所提算法参数估计精度高于旋转不变技术(ESPRIT),与一维全局谱峰搜索MUSIC(1D-TSS-MUSIC)算法基本相当,但本文算法显著降低了计算复杂度,且在多信源情况下依然可以获得可靠的参数估计。

关键词: 互质极化敏感阵列;模值约束;降维求根MUSIC;解模糊;参数估计

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.4020

Reduced-dimensional parameter estimation algorithm based on coprime polarization sensitive array

Lu Yanbin[1] Chen Wendong[2] Yang Yunxiu[3] Shu Qin[1]

(1. College of Electrical Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China;
2. Beijing Institute of Remote Sensing Equipment, Beijing 100005, China;
3. Southwest Institute of Technical Physics, Chengdu 610045, China)

Abstract: A joint DOA and polarization parameters estimation algorithm based on modulus-constrained reduced-dimensional and root multiple signal classification (MUSIC) is proposed for coprime polarization sensitive arrays to address the high computational complexity and ambiguity pairing errors. Firstly, by reconstructing the three-dimensional spectral function, the DOA and polarization parameters are decoupled to achieve dimensionality reduction in the three-dimensional MUSIC method. Then, the DOA is solved using polynomial roots, and the beamforming method is used to solve the problem of ambiguity angle mismatch in the coprime array. Finally, the cost function is constructed using the modulus boundedness of the polarization vector to derive the closed form solution of the polarization parameters. The numerical simulation results have verified the effectiveness of the algorithm. The simulation results show that the parameter estimation performance of the proposed algorithm is better than that of the estimating signal parameter via rotational invariance techniques (ESPRIT), and is basically equivalent to the one-dimensional total spectral peak search MUSIC (1D-TSS-MUSIC) algorithm. However, our algorithm significantly reduces computational complexity and can still obtain reliable parameter estimation in multi source scenarios.

Keywords: coprime polarization sensitive array; modular constraint; reduced-dimensional root-MUSIC; resolve ambiguity; parameter estimation

0 引 言

波达方向(direction of arrival,DOA)估计是雷达、声呐和无线通信中最重要的问题之一[1-2]。学者们先后提出了许多的DOA估计方法,例如,基于子空间的多重信号分类(multiple signal classification,MUSIC)算法和旋转不变技术(estimating signal parameter via rotational invariance techniques,ESPRIT)等[2],以及基于压缩感知的DOA估计算法[3-5]。随着由电磁矢量传感器组成的极化敏感阵列(polarization sensitive arrays, PSA)的广泛应用,DOA和

收稿日期:2024-01-11

极化参数的联合估计引起了学者的关注。极化描述了电磁波的矢量特性,是电磁波在幅度、频率、相位之外的另一维重要特征,相比于传统标量阵列,极化敏感阵列可以获取电磁波的极化信息,因此,具有更强的抗干扰能力以及更高的参数估计精度。ESPRIT 和 MUSIC 算法先后被推广到极化敏感阵列,但是极化 ESPRIT 需要额外的参数配对过程,而基于长矢量模型的极化 MUSIC 算法同时对空域和极化域进行四维谱峰搜索,计算量太大;文献[6]提出了一种基于极化敏感线阵的降维 MUSIC 算法,该算法通过重构四维 MUSIC 谱函数实现对 DOA 和极化参数估计的降维,通过一维局部搜索来估计精确的 DOA,最后利用估计的 DOA 来获得极化参数估计,大大降低了计算复杂度;文献[7]加强了约束条件,使得极化参数估计更接近最优解。文献[8]将接收信号建立为张量模型,提出一种平行因子算法,但是该算法需要大量的迭代计算。文献[9]针对基于分数低阶矩类阵列 DOA 估计方法仅适用于独立同分布背景噪声的缺点,提出了一种 DOA 和极化参数联合估计的分数低阶循环相关极化参数联合估计 ESPRIT 算法。

以上对于极化敏感阵列的研究主要是基于均匀线阵。DOA 估计的精度随着阵列孔径的增大而增高,但均匀线阵需要大量的阵元才能获得较大的阵列孔径,并且相邻传感器之间可能存在相互耦合效应。而互质阵列以较少的阵元获得较大的阵列孔径且减小了阵元间的耦合效应,所以成为一个研究热点,该阵列由两组阵元数互质的均匀稀疏子阵列叠加排列组成。目前针对互质阵列的 DOA 估计有两大路线,一种是基于虚拟阵列的信号处理方法[10-11],另一种是基于子阵分解的方法[12-16]。基于虚拟阵列的方法通过将接收信号协方差矩阵矢量化获得虚拟均匀阵列,可以获得更高的估计自由度[17-18]。但是虚拟化过程会产生孔洞,导致估计精度的下降。在基于子阵分解的方法中,互质阵列被视作两个稀疏的均匀线阵,从而获得两组高精度但模糊的 DOA,然后利用互质性质消除模糊角度获得真实的 DOA。虽然损失了部分自由度,但可以有效地利用均匀特性大大降低算法复杂度,这在工程应用中更具有实用性,因此本文考虑基于子阵分解的方法。

文献[19]将传统的 MUSIC 方法应用到两个稀疏均匀子阵,证明了互质阵列的 DOA 可以由两个子阵谱峰的共同值唯一确定,但是所提方法仍需复杂的谱峰搜索过程,且参数估计精度依赖于谱峰搜索的间隔。文献[12]提出局部谱峰搜索,以进一步降低计算量。以上两种方法都没有考虑到多信源情况下两组模糊角错误配对的情况。为避免复杂的谱峰搜索过程,文献[13]应用 ESPRIT 得到 DOA 的闭式解,通过基于 Capon 的方法消除错误配对角度,得到真实 DOA。文献[14]提出一种改进 DOA 估计算法,降低了计算的复杂度并避免了角度错配问题,文献[15]将该方法推广至极化敏感阵列。文献[16]提出阵列抽取思想,避免了子阵分解带来的互信息损失和配对错误问题。

然而,上述大多数关于互质阵列的研究都是基于标量阵列,在极化失配时,性能下降明显。为了充分利用极化敏感阵列在参数估计方面更优秀的性能,本文研究了互质极化敏感阵列参数联合估计问题,提出一种模值约束降维求根 MUSIC 算法。将三维 MUSIC 方法进行降维,利用多项式求根求解出 DOA,并利用波束形成方法解决互质阵列中存在的解模糊角度错配问题,最后用模值约束的优化算法推导出极化参数的闭式解。数值仿真结果验证了该算法的有效性,结果表明,本文算法在多信源情况下具有更高的鲁棒性。参数估计精度高于 ESPRIT 算法,与一维全局谱峰搜索 MUSIC (one-dimensional total spectral search MUSIC, 1D-TSS-MUSIC)算法基本相当,但本文算法显著降低了计算复杂度。

1　阵列与信号模型

本文考虑互质极化敏感线阵,阵列结构如图 1 所示。其阵元由双正交偶极子天线对构成,排列方式为两个稀疏的均匀阵列以首阵元重叠的形式叠加排列。两个子阵的阵元数分别为 M_1 和 M_2,且阵元间距为 $M_2 d$ 和 $M_1 d$,其中 M_1 和 M_2 是一对互质的整数,单位间隔 $d=\lambda/2$,λ 为电磁波波长。定义俯仰角 $\theta\in[0,\pi/2]$ 为信号入射方向与 z 轴正向的夹角,方位角 $\varphi\in[0,2\pi]$ 为与 x 轴正向的夹角。

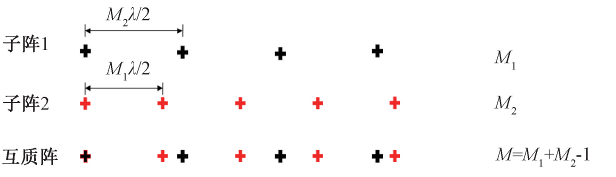

图 1　互质极化敏感线阵结构($M_1=4$,$M_2=5$)

假设有 K 个不相关的远场窄带完全极化波入射到该阵列,第 k 个入射信号的空间俯仰角用 θ_k 表示,方位角用 φ_k 表示。子阵 $i(i=1,2)$ 对第 k 个信号的空间导向矢量为 $\boldsymbol{a}_{s,k}^{i}=[1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_i\sin\theta_k/\lambda},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(M_i-1)d_i\sin\theta_k/\lambda}]^{\mathrm{T}}$。其中,j 为虚数单位,$d_i$ 表示子阵 i 阵元间隔,$d_i=M_{\tilde{i}}(\lambda/2)$,$i+\tilde{i}=3$,$[\cdot]^T$ 表示转置操作。

本文采用正交双偶极子天线,故每个阵元对接收信号的极化导向矢量为:

$$\boldsymbol{a}_p(\theta,\varphi,\gamma,\eta)=\begin{bmatrix}-\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi\\ \cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\gamma\\ \sin\gamma\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\eta}\end{bmatrix}\tag{1}$$

式中:$\gamma\in[0,\pi/2]$ 和 $\eta\in[-\pi,\pi]$ 分别表示极化辅助角和极化相位差。不失一般性,假设信号从垂直于 x 轴的平面射入,即方位角 $\varphi=\pi/2$,故每个阵元对第 k 个接收信号的极化导向矢量可简化为:

$$\boldsymbol{a}_p(\theta_k,\gamma_k,\eta_k)=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\gamma_k\\ \sin\gamma_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\eta_k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos\gamma_k\\ \cos\theta_k\sin\gamma_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\eta_k}\end{bmatrix}\tag{2}$$

因此子阵 i 对第 k 个信号的空域—极化域联合接收导向矢量为:

$$\boldsymbol{a}^i(\theta_k,\gamma_k,\eta_k)=\boldsymbol{a}_s^i(\theta_k)\otimes\boldsymbol{a}_p(\theta_k,\gamma_k,\eta_k) \tag{3}$$

对于子阵 i,t 时刻 K 个远场信号入射到 M_i 个阵元的接收模型为:

$$\boldsymbol{x}^i(t)=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{a}^i(\theta_k,\gamma_k,\eta_k)s_k(t)+\boldsymbol{n}^i(t)=\sum_{k=1}^{K}[\boldsymbol{a}_s^i(\theta_k)\otimes\boldsymbol{a}_p(\theta_k,\gamma_k,\eta_k)]s_k(t)+\boldsymbol{n}^i(t)=\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{n}^i(t) \tag{4}$$

式中:$\boldsymbol{A}^i=(\boldsymbol{a}^i(\theta_1,\gamma_1,\eta_1),\boldsymbol{a}^i(\theta_2,\gamma_2,\eta_1),\cdots\boldsymbol{a}^i(\theta_K,\gamma_K,\eta_K))=(\boldsymbol{A}_s^i\odot\boldsymbol{A}_p)\in C^{2M_i\times K}$ 代表空域—极化域联合阵列流型矩阵,$\otimes$ 为 Kronecker 积,$\odot$ 为 Khatri-Rao 积。$\boldsymbol{s}(t)=(s_1(t),s_2(t)\cdots s_K(t))^T\in C^{K\times 1}$ 为 t 时刻信源矢量。$\boldsymbol{n}^i(t)\in C^{2M_i\times 1}$ 是均值为零的高斯白噪声。

2　算法介绍

2.1　传统三维 MUSIC 算法

将互质阵列分解为两个均匀的稀疏子阵,第 i 个子阵接收信号的协方差矩阵估计为:

$$\hat{\boldsymbol{R}}^i=(1/L)\sum_{t=1}^{L}\boldsymbol{x}^i(t)[\boldsymbol{x}^i(t)]^H \tag{5}$$

$\hat{\boldsymbol{R}}_i$ 的特征值分解可以表示为:

$$\hat{\boldsymbol{R}}^i=\boldsymbol{U}_s^i\boldsymbol{\Lambda}_s^i\boldsymbol{U}_s^{iH}+\boldsymbol{U}_n^i\boldsymbol{\Lambda}_n^i\boldsymbol{U}_n^{iH} \tag{6}$$

式中:$\boldsymbol{U}_s^i$ 和 $\boldsymbol{U}_n^i$ 分别代表子阵 i 接收信号的信号子空间和噪声子空间,$\boldsymbol{\Lambda}_s^i$ 为 K 个大特征值组成的特征值矩阵,$\boldsymbol{\Lambda}_n^i$ 为 $2M_i-K$ 个小特征值组成的特征值矩阵,$[\bullet]^H$ 表示共轭转置操作。则子阵 i 的三维联合 MUSIC 谱函数可以定义为[15]:

$$P_{3D-MUSIC}^i(\theta,\gamma,\eta)=\frac{1}{(\boldsymbol{a}_s^i(\theta)\otimes\boldsymbol{a}_p(\theta,\gamma,\eta))^H\boldsymbol{U}_n^i\boldsymbol{U}_n^{iH}(\boldsymbol{a}_s^i(\theta)\otimes\boldsymbol{a}_p(\theta,\gamma,\eta))} \tag{7}$$

传统算法为遍历 θ,γ,η 三个参数,找出谱函数 K 个峰值对应的参数即为所求,但是三维全局搜索计算量太大,且精度依赖于搜索网格的大小,因此,本文提出基于降维求根的 MUSIC 算法,获取参数估计的闭式解,在降低计算量的同时保证估计精度。

2.2　降维求根 MUSIC 算法

令目标函数为:

$$H^i(\theta,\gamma,\eta)=(\boldsymbol{a}_s^i(\theta)\otimes\boldsymbol{a}_p(\theta,\gamma,\eta))^H\boldsymbol{U}_n^i\boldsymbol{U}_n^{iH}(\boldsymbol{a}_s^i(\theta)\otimes\boldsymbol{a}_p(\theta,\gamma,\eta)) \tag{8}$$

当 (θ,γ,η) 为入射信号的真实参数时,由子空间原理可知,阵列流型矩阵张成的空间和噪声子空间正交[6],即 $H^i(\theta,\gamma,\eta)=0$。根据克罗内克积的性质,式(8)可改写为[5]:

$$H^i(\theta,\gamma,\eta)=\boldsymbol{a}_p^H(\theta,\gamma,\eta)[\boldsymbol{a}_s^i(\theta)\otimes\boldsymbol{I}_2]^H\boldsymbol{U}_n^i\boldsymbol{U}_n^{iH}[\boldsymbol{a}_s^i(\theta)\otimes\boldsymbol{I}_2]\boldsymbol{a}_p(\theta,\gamma,\eta)=\boldsymbol{a}_p^H(\theta,\gamma,\eta)\boldsymbol{G}^i(\theta)\boldsymbol{a}_p(\theta,\gamma,\eta) \tag{9}$$

式中:$\boldsymbol{G}^i(\theta)=[\boldsymbol{a}_s^i(\theta)\otimes\boldsymbol{I}_2]^H\boldsymbol{U}_n^i\boldsymbol{U}_n^{iH}[\boldsymbol{a}_s^i(\theta)\otimes\boldsymbol{I}_2]$,$\boldsymbol{I}_2$ 为二阶单位矩阵。可以看出 $\boldsymbol{G}^i(\theta)$ 中只包含 DOA 信息,而 $\boldsymbol{a}_p^H(\theta,\gamma,\eta)$ 包含了 DOA 信息和极化信息。由于 $\boldsymbol{a}_p^H(\theta,\gamma,\eta)$ 是列满秩的,所以要使 $H^i(\theta,\gamma,\eta)=0$,当且仅当 $\det\{\boldsymbol{G}^i(\theta)\}=0$ 时成立。因此 DOA 的估计可以转化成求 $1/\det\{\boldsymbol{G}^i(\theta)\}$ 的 K 个峰值。对 DOA 和极化参数解耦从而实现了参数估计的降维,但是上式的谱峰搜索仍然需要很大的计算量,同时也会受网格划分的影响,为避免搜索,同时获取参数的闭式解,下面引入多项式求根算法。

令 $z=\mathrm{e}^{-2\pi d_i\sin\theta/\lambda}$,将 $\boldsymbol{G}^i(\theta)$ 重写成关于 z 的多项式[7]:

$$\boldsymbol{G}^i(z)=[\boldsymbol{a}_s^i(z)\otimes\boldsymbol{I}_2]^H\boldsymbol{U}_n^i\boldsymbol{U}_n^{iH}[\boldsymbol{a}_s^i(z)\otimes\boldsymbol{I}_2]=[z^{M_i-1}\boldsymbol{a}_s^i(z^{-1})\otimes\boldsymbol{I}_2]^T\boldsymbol{U}_n^i\boldsymbol{U}_n^{iH}[\boldsymbol{a}_s^i(z)\otimes\boldsymbol{I}_2] \tag{10}$$

令 $\det\{\boldsymbol{G}^i(z)\}=0$,利用多项式求根,得到的解为 $[z_1^i,z_2^i\cdots z_K^i]$,所以 DOA 可通过下式求解:

$$\theta_k^i=\arcsin(-angle(z_k^i)\lambda/2\pi d_i) \tag{11}$$

需要注意的是,由于子阵的阵元间距大于半波长,MUSIC 谱峰存在角度模糊问题,所以通过上面求根 MUSIC 算法求出来的 DOA 可能为模糊角。同理,子阵 2 也可以求出 K 个 DOA 模糊角度。下面介绍解模糊原理。

2.3　互质阵列解模糊

根据文献[19]可知,稀疏布阵产生的角度模糊在互质阵中有一定的规律性。对于一个由 M_1 和 M_2 个阵元的均匀子阵组成的互质阵列,假设 $\theta_k{}^a$ 是波达方向 θ_k 的模糊角度,对于阵元数目为 M_1 的子阵 1,则应满足式(12)。

$$\sin(\theta_k{}^a)-\sin(\theta_k)=\frac{2P_1}{M_2} \tag{12}$$

其中,$P_1=-(M_2-1),\cdots-1,1,\cdots M_2-1$。以正弦函数的值域作为约束条件进行角度筛选,从上式中可以得到包括真实 DOA 和模糊角在内的 M_2 个侯选角。

同理,对于子阵 2,有:

$$\sin(\theta_k{}^a)-\sin(\theta_k)=\frac{2P_2}{M_1} \tag{13}$$

$P_2=-(M_1-1),\cdots-1,1,\cdots M_1-1$。可以找到 M_1 个侯选角。

在两组子阵中求得的侯选角中有且仅有一个相同的 θ_k,即真实 DOA 为两个子阵侯选角的共有元素。所以通过寻找两个阵列的共同角度即可求得真实 DOA 而消除额外的模糊角。由于噪声的存在,两个子阵中对应真实 DOA 值的模糊估计值不会完全相等。因此,根据式两个子阵的估计结果恢复出所有模糊值,找到其中最接近的一对模糊值后取平均,则认为其对应真实 DOA 估计[19]。

然而在多目标情况下,假设信源数为 K,由子阵 1 得到 $M_2\times K$ 个侯选角,由子阵 2 得到 $M_1\times K$ 个侯选角。来自不同信源的模糊角度如果比来自同一个信源的更加接近时,不同子阵中不同信源的模糊值进行配对,导致解模糊失

败，得到错误的 DOA 估计。

以子阵数分别为 $M_1=5$ 和 $M_2=8$ 的互质阵为例，2 个信源，其入射角分别为 20°和 40°。

图 2 为两个子阵的 MUSIC 谱。可以看出，子阵 1 产生 8×2 个候选角，子阵 2 产生 5×2 个候选角，在 20°处两个空间谱的峰值是重合的，40°也是如此。但是存在不同信源入射角所产生的候选角配对的情况，比如 −9°处 20°信源在子阵 1 上产生的模糊角谱峰和 40°信源在子阵 2 上产生的模糊角谱峰重合，−59°处同理，此为多信源情况下角度错误配对。因此在噪声较大情况下，如果取最接近的两组谱峰值，可能会产生 DOA 错误估计。

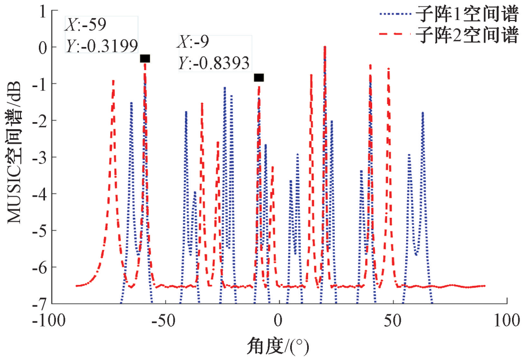

图 2　子阵分解的 MUSIC 空间谱

针对此问题，本文利用波束形成技术来消除配对错误的角度。取整个互质极化阵列中的 x 轴方向偶极子接收到的数据：

$$\boldsymbol{X}_x=\boldsymbol{A}_c diag[\cos(\gamma_1),\cos(\gamma_2),\cdots,\cos(\gamma_k)]\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S} \tag{14}$$

式中：$\boldsymbol{A}_c=(\boldsymbol{a}_c(\theta_1),\boldsymbol{a}_c(\theta_2),\cdots,\boldsymbol{a}_c(\theta_K),)$ 为互质极化阵列的空域阵列流型，$\boldsymbol{S}$ 为多快拍信源矩阵。$\boldsymbol{\Lambda}=diag[\cos(\gamma_1),\cos(\gamma_2),\cdots,\cos(\gamma_k)]$ 为由 x 轴方向电场分量组成的对角阵。

其协方差矩阵：

$$\boldsymbol{R}_{cx}=E[\boldsymbol{X}_x\boldsymbol{X}_x^H]=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}_c^H=\boldsymbol{A}_c\tilde{\boldsymbol{R}}_S\boldsymbol{A}_c^H \tag{15}$$

式中：$\tilde{\boldsymbol{R}}_S=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{\Lambda}$。则整个极化阵列的波束形成公式为：

$$P_{CBF}=\boldsymbol{a}_c^H(\theta)\boldsymbol{R}_{cx}\boldsymbol{a}_c(\theta) \tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{a}_c(\theta)$ 为整个极化互质阵列的空域导向矢量。可以将解模糊得到的 DOA 值代入上式，通过寻找上式的 K 个最大值，即可得到真实的 DOA 而消除配对错误的角度。

2.4　模值约束求极化参数

极化参数可用模值约束优化算法求解。由式(2)，$H(\theta,\gamma,\eta)$ 可以重构为：

$$H(\theta,\gamma,\eta)=\boldsymbol{\sigma}^H(\gamma,\eta)(\boldsymbol{a}_s(\theta)\otimes\boldsymbol{\Gamma}(\theta))^H\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^H(\boldsymbol{a}_s(\theta)\otimes\boldsymbol{\Gamma}(\theta))\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)=\boldsymbol{\sigma}^H(\gamma,\eta)\boldsymbol{\Phi}(\theta)\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta) \tag{17}$$

式中：$\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)=\begin{bmatrix}\cos\gamma\\ \sin\gamma e^{j\eta}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Gamma}(\theta)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$。

该优化问题可以描述为：

$$\begin{cases}\min\ \boldsymbol{\sigma}^H(\gamma,\eta)\boldsymbol{\Phi}(\theta)\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)\\ s.t.\ |\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)|^2=1\end{cases} \tag{18}$$

由拉格朗日乘子法，构建代价函数[7]：

$$J(\theta,\gamma,\eta)=\boldsymbol{\sigma}^H(\gamma,\eta)\boldsymbol{\Phi}(\theta)\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)-\omega(\boldsymbol{\sigma}^H(\gamma,\eta)\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)-1) \tag{19}$$

式中：ω 为拉格朗日乘子，$J(\theta,\gamma,\eta)$ 对 $\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)$ 求梯度，并令其为 0，可得：

$$\triangledown J(\theta,\gamma,\eta)=2\boldsymbol{\Phi}(\theta)\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)-2\omega\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)=0 \tag{20}$$

即：

$$\boldsymbol{\Phi}(\theta)\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)=\omega\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta) \tag{21}$$

可以看出 $\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)$ 为 $\boldsymbol{\Phi}(\theta)$ 的特征值 ω 所对应的特征向量。对上式左边同乘以 $\boldsymbol{\sigma}^H(\gamma,\eta)$，可以得到：

$$\boldsymbol{\sigma}^H(\gamma,\eta)\boldsymbol{\Phi}(\theta)\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)=\omega\boldsymbol{\sigma}^H(\gamma,\eta)\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)=\omega \tag{22}$$

所以要使得 $\boldsymbol{\sigma}^H(\gamma,\eta)\boldsymbol{\Phi}(\theta)\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)$ 最小，即求其最小特征值，且 $\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)$ 为最小特征值所对应的特征向量。

将上一小节求出的波达角 $\hat{\theta}$ 带入，然后对 $\boldsymbol{\Phi}(\hat{\theta})$ 进行特征值分解，求得其最小特征值对应的特征向量 $[\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)]^{\min}$，则极化参数可以由下式求解：

$$\begin{aligned}\gamma&=\arctan\left\{\left|\frac{[\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)]_2^{\min}}{[\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)]_1^{\min}}\right|\right\}\\ \eta&=angle\{[\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)]_2^{\min}\}\end{aligned} \tag{23}$$

其中，$[\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)]_j^{\min}$ 表示最小特征值 $[\boldsymbol{\sigma}(\gamma,\eta)]^{\min}$ 的第 j 个元素。

3　算法复杂度分析

本节讨论所提算法的计算复杂度，并与 1D-TSS-MUSIC 算法[19]和 ESPRIT 算法[13]的复杂度进行比较。子空间类算法的复杂度主要来自于协方差矩阵的计算和特征值分解。假设快拍数 L，子阵 1 的阵元数为 M_1，子阵 2 的阵元数为 M_2，远场不相关信源数 K，n 表示角度搜索的次数。子阵 i 的接收信号维度为 $2M_i$，则计算接收信号协方差矩阵的复杂度为 $4L(M_1^2+M_2^2)$，协方差矩阵特征值分解的复杂度为 $8(M_1^3+M_2^3)$，本文算法中多项式求根复杂度为 $(M_1-1)^3+(M_2-1)^3$，1D-TSS-MUSIC 算法中谱峰搜索的复杂度为：

$n(8M_1(2M_1-K)+8M_1+8M_2(2M_2-K)+8M_2)$，其中 n 表示角度搜索的次数。ESPRIT 算法中特征值分解复杂度为 $2(6(M_1+M_2)K^2+4K^3$，波束形成解模糊算法中接收信号求协方差矩阵的复杂度为 $L(M_1^2+M_2^2)$，对于各算法的计算复杂度总结如下。

本文算法的计算复杂度为：

$$5L(M_1^2+M_2^2)+8(M_1^3+M_2^3)+(M_1-1)^3+(M_2-1)^3 \tag{24}$$

1D-TSS-MUSIC 算法的计算复杂度为：

$$4L(M_1^2+M_2^2)+8(M_1^3+M_2^3)+n(8M_1(2M_1-K)+8M_1+8M_2(2M_2-K)+8M_2) \tag{25}$$

ESPRIT 算法的计算复杂度为：

$$5L(M_1^2+M_2^2)+8(M_1^3+M_2^3)+2(6(M_1+M_2)K^2+4K^3) \tag{26}$$

图 3 和 4 为各算法复杂度的柱状图比较，从左到右依次为本文算法、ESPRIT 算法和 1D-TSS-MUSIC 算法。取 $K=2, L=100, M_1=5, M_2=8$，搜索间隔 $\Delta=0.01°$，搜索次数 $n=180°/0.01°=18\ 000$。

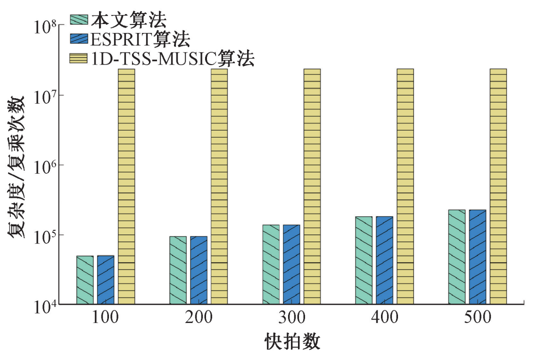

图 3　各算法复杂度和快拍数的关系

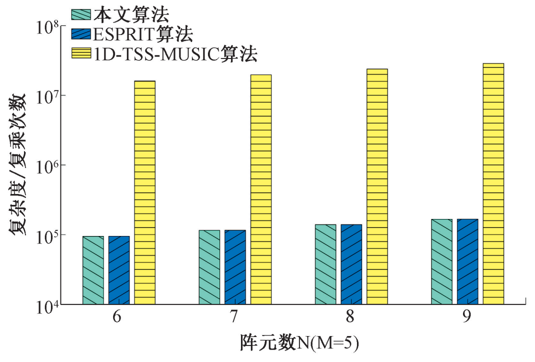

图 4　各算法复杂度和阵元数目的关系

由图 3 和 4 可以看出，本文所提算法的复杂度和 ESPRIT 算法基本相当，远低于 1D-TSS-MUSIC 算法，这是因为传统谱峰搜索算法计算复杂度主要取决于谱峰搜索次数 n，本文算法复杂度不含与 n 相关的项，所以计算量大大较低，约为传统算法在搜索间隔为 0.01°时的 1%。

4　仿真实验

本节对所提算法的有效性以及不同信噪比或快拍数条件下估计性能进行仿真验证，与 1D-TSS-MUSIC 算法和 ESPRIT 算法进行对比实验。所有的仿真在 MATLAB R2016b 上实现，仿真计算机为 Intel Core i5 处理器和 8 GB 内存，运行 Win10 系统。阵元数目为 12，其中，子阵 1 阵元数 $M_1=5$，子阵 2 阵元数 $M_2=8$。算法的性能由均方根误差(root mean square error，RMSE)来衡量，表达式为：

$$\begin{aligned}
RMSE_\theta &= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sqrt{\frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}(\hat{\theta}_{k,p}-\theta_k)^2}\\
RMSE_\gamma &= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sqrt{\frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}(\hat{\gamma}_{k,p}-\gamma_k)^2}\\
RMSE_\eta &= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sqrt{\frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}(\hat{\eta}_{k,p}-\eta_k)^2}
\end{aligned} \tag{27}$$

其中，K 是信号源个数，P 是蒙特卡洛仿真次数。$\hat{\theta}_{k,p}$、$\hat{\gamma}_{k,p}$ 和 $\hat{\eta}_{k,p}$ 分别表示第 k 个信源第 p 次仿真中的估计值。

4.1　本文算法估计结果

在信噪比 20 db，快拍数 300 条件下，进行 100 次蒙特卡洛仿真，考虑两个不相关目标的 DOA 和极化参数 (θ,γ,η) 为(10°，10°，40°)，(20°，20°，60°)。子阵 1 的阵元数 $M_1=5$，子阵 2 的阵元数 $M_2=8$。图 5 和 6 给出本文算法估计出的 DOA 和极化参数的坐标图，证明了本文算法的有效性。

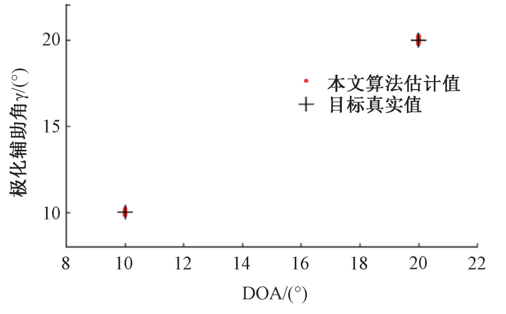

图 5　DOA 和极化辅助角 γ

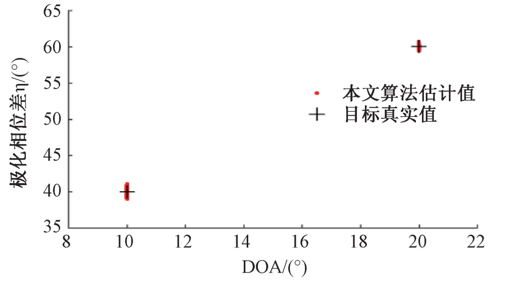

图 6　DOA 和极化相位差 η

4.2　解模糊配对可靠性仿真

假设 3 个不相关目标以 DOA 和极化参数 (θ,γ,η) 为(20°，10°，40°)、(30°，10°，40°)和(40°，10°，40°)射入阵列，信噪比为 5 dB，其他参数不变。进行 50 次重复实验，图 7 给出本文算法和 1D-TSS-MUSIC 算法的仿真结果，可以看出 1D-TSS-MUSIC 算法在多信源情况下会出错，得到－9°和－59°两个错误配对的角，而本文算法由于利用波束形成算法进行阵列配对，可以成功地获得真实的 DOA。

4.3　信噪比对参数估计精度的影响

本节测试不同信噪比下各算法 DOA 和极化参数估计

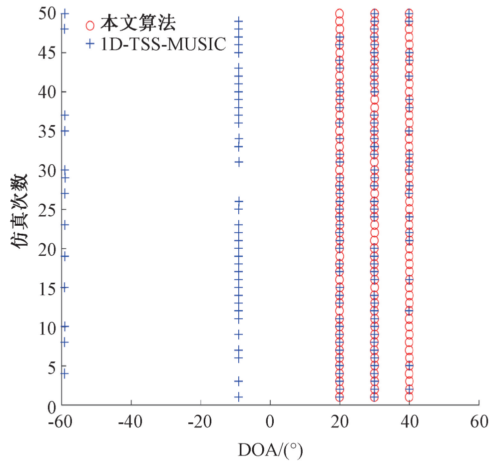

图 7　解模糊可靠性仿真

性能。两个不相关目标参数与第一次仿真中的相同。快拍数为 300，信噪比范围设置为－5～15 dB，间隔 5 dB，蒙特卡洛仿真次数为 300。仿真测试不同信噪比条件下 DOA 和极化参数估计值相对于真实角度的蒙特卡洛重复实验的 RMSE。图 8～10 分别给出了本文算法、1D-TSS-MUSIC 算法和 ESPRIT 算法的 DOA 估计和极化参数估计的 RMSE 随 SNR 变化的对比曲线。

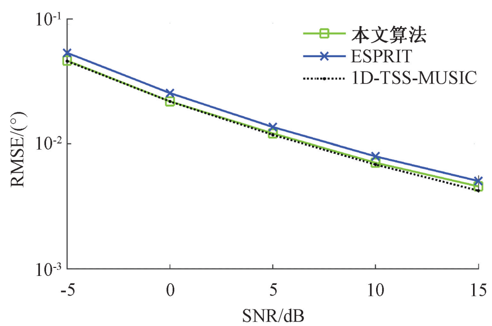

图 8　不同信噪比下 DOA 估计均方根误差

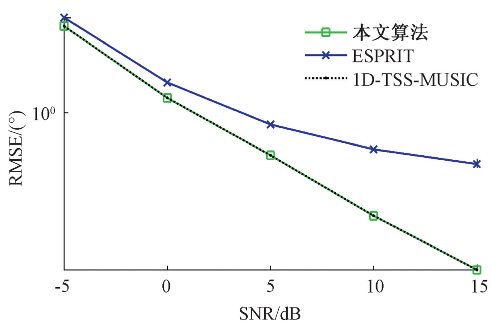

图 9　不同信噪比下极化辅助角 γ 估计均方根误差

从图 8～10 中可以看出，随着信噪比的增大，三种算法 DOA 的估计误差都呈下降趋势，其中本文算法明显优于 ESPRIT 算法，和 1D-TSS-MUSIC 算法性能基本保持一致；本文算法和 1D-TSS-MUSIC 算法的极化辅助角 RMSE 收敛明显快于 ESPRIT 算法；极化相位差的估计精度在低信噪比情况下，本文算法和 1D-TSS-MUSIC 算法明显优于 ESPRIT 算法，随着信噪比增大，3 种算法性能基本趋于一致。

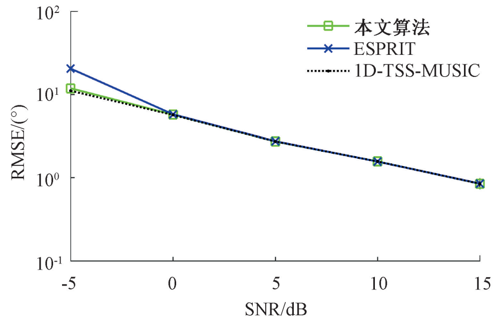

图 10　不同信噪比下极化相位差 η 估计均方根误差

4.4　快拍数对参数估计精度的影响

在本次仿真中，对比快拍数对算法性能的影响，仿真信噪比为 5 dB，快拍数范围设置为 100～500，间隔为 100，其他仿真条件与上次实验相同。图 11～13 分别给出 3 种算法 DOA 和极化参数估计的 RMSE 随快拍数变化的对比曲线。

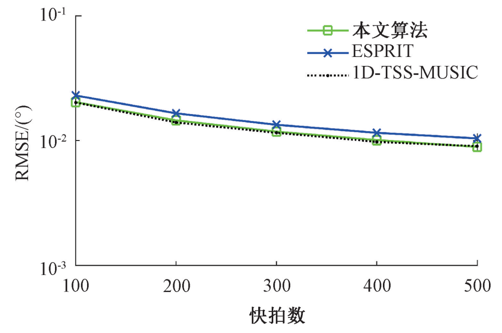

图 11　不同快拍下 DOA 估计均方根误差

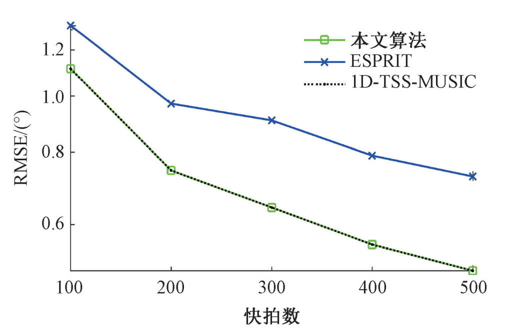

图 12　不同快拍下极化辅助角 γ 估计均方根误差

从图 11～13 可以看出随着快拍数的增加，三种算法的性能都提高了，因为快拍数的增加带来更准确的协方差估计。其中，对于 DOA 的估计，本文算法和 1D-TSS-MUSIC 算法基本一致，优于 ESPRIT 算法；对于极化辅助角 γ，本文算法精度和 1D-TSS-MUSIC 基本一致，明显优于

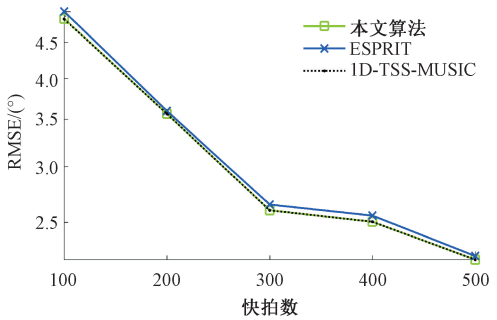

图 13　不同快拍下极化相位差 η 估计均方根误差

ESPRIT 算法;对于极化相位差 η,本文算法和 1D-TSS-MUSIC 基本一致,相比 ESPRIT 算法略有优势。

4.5　与标量阵列及相同阵元数的均匀阵列比较

在本小节中,展示了不同阵列配置对 RMES 的影响,包括本文所用互质极化敏感阵列、相同阵元数的极化敏感均匀阵列以及传统的互质标量阵列。互质极化敏感阵列和互质标量阵列都由两个稀疏子阵构成,其中子阵 1 阵元数 $M_1=5$,子阵 2 阵元数 $M_2=8$,极化敏感均匀阵列由 12 个阵元间隔为半波长的极化敏感阵元构成。均采用求根 MUSIC 算法,其他仿真条件同上次实验。

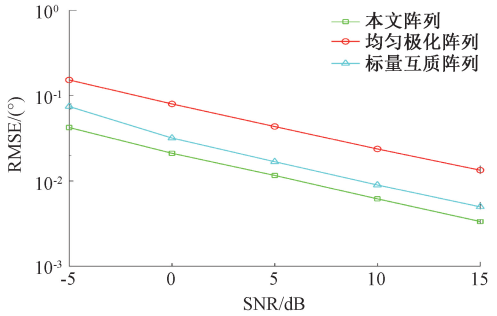

图 14　不同阵列结构的 DOA 估计性能比较

图 14 证明了本文阵列 DOA 估计性能的优越性,由于是稀疏布阵,阵列孔径的增大,使得 DOA 估计性能比相同阵元数的极化均匀阵列更好;由于采用极化敏感阵元,引入更多一维的极化信息,使得 DOA 估计性能优于同样阵列排布的标量阵列。

5　结　　论

本文提出了一种基于互质极化敏感阵列的模值约束降维求根 MUSIC 参数联合估计算法。该算法首先利用克罗内克积的性质,对空域—极化域联合谱函数进行重构,从而实现 DOA 和极化参数的解耦,然后将三维谱峰搜索转化为求根 MUSIC 方法求解模糊 DOA 和约束优化方法求解极化参数。同时,针对互质阵列存在的角度配对错误问题,利用波束形成的方法来解决。在估计精度基本不变的情况下,大大降低了计算的复杂度,提高了算法的可靠性,具有更高的工程实用价值。本文算法由于将互质阵列分解成两个子阵进行处理,虽然降低了复杂度,但是损失了一半以上的自由度,无自由度损失的参数估计算法将是下一步研究的重点。

参考文献

[1] 陈涛,申梦雨,史林,等. 基于通道压缩的原子范数最小化 DOA 估计算法[J]. 仪器仪表学报,2022,43(4):246-253.

[2] 单泽彪,王宇祥,常立民,等. 冲击噪声背景下相干信号 DOA 估计[J]. 电子测量技术,2022,45(15):166-171.

[3] 陈鹏,陈志敏,方兰婷,等. 存在阵列误差时稀疏相关信号的 DOA 估计[J]. 国外电子测量技术,2019,38(12):41-44.

[4] 陈果,卢永刚. 宽带声源方位估计的多频稀疏贝叶斯学习改进算法[J]. 仪器仪表学报,2023,44(5):302-312.

[5] 单泽彪,薛泓垚,刘小松,等. 基于双曲复合函数近似 l0 范数的 DOA 估计[J]. 电子测量技术,2023,46(22):49-55.

[6] ZHANG X F, CHEN C, LI J F, et al. Blind DOA and polarization estimation for polarization-sensitive array using dimension reduction MUSIC [J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2014, 25(1): 67-82.

[7] 李会勇,张远芳,谢菊兰. 极化敏感线阵的模值约束降维 Root-MUSIC 算法[J]. 信号处理,2016,32(2):173-178.

[8] WEN F Q, SHI J P, ZHANG Z. Joint 2D-DOD, 2D-DOA, and polarization angles estimation for bistatic EMVS-MIMO radar via PARAFAC analysis[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2020, 69(2): 1626-1638.

[9] 石屹然,赵晓晖,单泽彪,等. 基于 FLOCC-ESPRIT 的极化阵列参数估计方法[J]. 仪器仪表学报,2016,37(9):2076-2083.

[10] 韦娟,严世安,宁方立. 基于互质阵虚拟阵列空间平滑的相干信号 DOA 估计方法[J]. 系统工程与电子技术,2022,44(4):1069-1077.

[11] 曾富红,彭占立,司伟建,等. 基于双平行互质极化敏感阵列的二维非网格 DOA 及极化参数估计[J]. 航空兵器,2023,30(3):129-135.

[12] SUN F G, LAN P, GAO B. Partial spectral search-

based DOA estimation method for co-prime linear arrays [J]. Electronics Letters, 2015, 51(24): 2053-2055.

[13] SUN F G, GAO B, CHEN L Z, et al. A low-complexity ESPRIT-based DOA estimation method for co-prime linear arrays[J]. Sensors, 2016, 16(9): 1367.

[14] ZHANG D, ZHANG Y S, ZHENG G M, et al. Improved DOA estimation algorithm for co-prime linear arrays using root-MUSIC algorithm [J]. Electronics Letters, 2017, 53(18): 1277-1279.

[15] SHEN J Q, ZHANG X F, HE Y. Blind joint DOA and polarization estimation for polarization-sensitive coprime arrays via reduced-dimensional root finding approach [J]. Journal of Circuits, Systems and Computers, 2020, 29(7): 2050104.

[16] LIU A H, YANG Q, ZHANG X, et al. Modified root MUSIC for co-prime linear arrays [J]. Electronics Letters, 2018, 54(15): 949-951.

[17] 刘晓宇，陈俊丽，徐略秋. 基于嵌套阵列的一种快速DOA估计算法[J]. 电子测量技术，2019，42(23)：111-115.

[18] 周英钢，邵佳伟. 对数螺旋阵列的相干信号 DOA 估计研究[J]. 电子测量与仪器学报，2023，37(2)：220-227.

[19] 周成伟，郑航，顾宇杰，等. 互质阵列信号处理研究进展：波达方向估计与自适应波束成形[J]. 雷达学报，2019，8(5)：558-577.

作者简介

逯岩斌，硕士研究生，主要研究方向为阵列信号处理。

E-mail：1256246893@qq.com

陈文东，博士，主要研究方向为雷达总体设计与雷达电子反对抗技术。

E-mail：chen_eecs@sina.com

杨赟秀，高级工程师，主要研究方向为雷达信号处理、探测器设计。

E-mail：yangyang_judy@126.com

舒勤，博士，教授，主要研究方向为雷达信号处理、通信抗干扰、电力系统谐波阻抗估计等。

E-mail：shuqin@scu.edu.com