

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2107984

# 基于改进粒子群算法的精密隔振系统 LQR 控制<sup>\*</sup>

范伟 孟江 杜永飞 蒋童 刘凯  
(中北大学机械工程学院 太原 030051)

**摘要:**为解决线性二次型控制器(LQR)权值参数难以通过经验选取最优组合的问题,采用一种贪婪 Lévy PSO 算法对 LQR 权值矩阵 Q 进行寻优。传统粒子群算法易局部收敛,在此基础上加入 Lévy 飞行原理和贪婪选择方法从而扩大参数寻优范围且提高收敛速度,得出最优权值矩阵 Q。对在 LQR 控制下的双层精密隔振系统模型在扫频激励和随机激励两种情况时隔振对象的加速度响应和位移响应进行分析。最终结果为收敛速度提升 75%,针对两种激励情况的加速和位移削弱程度均在 90%以上。仿真结果表明贪婪 Lévy PSO 算法可有效增加种群分布的均匀性提高收敛速度寻得最优解,且在更短的时间内寻得更好的结果,两种激励情况时均能有效实现隔振。

**关键词:**精密隔振平台;线性二次型控制器;Lévy 飞行算法;粒子群优化

中图分类号: TP273; TB535.1 文献标识码: A 国家标准学科分类代码: 460

## LQR control of precision vibration isolation system based on an improved particle swarm algorithm

Fan Wei Meng Jiang Du Yongfei Jiang Tong Liu Kai  
(School of Mechanical Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** In order to solve the problem that it is difficult to select the optimal combination of linear quadratic controller (LQR) weight parameters through experience, a Lévy flying particle swarm algorithm with greedy principle is proposed to optimize the LQR weight matrix Q. The traditional particle swarm algorithm is easy to locally converge. On this basis, the Lévy flight principle and the greedy selection method are added to expand the parameter optimization range and increase the convergence speed, and the optimal weight matrix Q is obtained. The acceleration response and displacement response of the vibration isolation object under the two-layer precision vibration isolation system model under the control of LQR are analyzed under the conditions of sweep frequency excitation and random excitation. The final result is a 75% improvement in convergence rate and 90% reduction in acceleration and displacement for both excitations. The simulation results show that the Lévy flying particle swarm algorithm with the principle of greed is effective increasing the uniformity of the population distribution improves the convergence speed to find the optimal solution, and can effectively achieve vibration isolation in both excitation conditions.

**Keywords:** precision vibration isolation platform; linear quadratic (LQR) controller; Lévy flight algorithm; particle swarm optimization

## 0 引言

为保证精密仪器在运行过程中的精度要求,对于外部环境微振动的隔离控制显得尤为重要。对于宽频段微振动的隔离,混合隔振系统效果较好,低频时主动隔振起主要作用。

控制方法是主动隔振的核心内容,线性二次型调节器(linear quadratic regulator, LQR),较为简单易用,并且在有约束条件下可同时兼顾多个系统指标和控制效果<sup>[1]</sup>。但

LQR 控制方法中权重参数的选择困难,人工试选费时费力,最终得出的结果无法保证是最优结果。

现常用的智能优化算法寻求目标最优值,汤伟等<sup>[2]</sup>为得到最优控制参数组合,采用退火算法确定了最优参数组合,但该方法的计算量较大;蔡聰仁等<sup>[3]</sup>采用遗传算法得到最优控制参数组合,实现了参数一定时间内的实时最优,但算法实现过程复杂;Feng 等<sup>[4]</sup>提到粒子群算法实现简单,收敛速度快,但易陷入局部最优解;张真诚等<sup>[5]</sup>采用粒子

收稿日期:2021-09-29

\*基金项目:山西省面上自然科学基金(201801D121184)项目资助

群-蚁群算法得到目标值的最优解,但在复杂环境下存在收敛速度慢等问题。为解决粒子群(particle swarm optimization, PSO)算法由于种群聚集而导致的收敛速度慢的问题,本文在粒子群算法的基础上通过Lévy飞行(Lévy flight)原理进行种群更新,通过贪婪原则对最优个体进行筛选整合,最终实现对LQR控制权值参数的寻优。使用贪婪Lévy飞行粒子群(贪婪Lévy PSO)算法得出的权值组合进行仿真分析,相比于被动隔振,在扫频激励和随机激励时隔振对象的加速度响应和位移响应均有明显改善。

## 1 系统模型建立

### 1.1 双层隔振系统模型

双层隔振系统由主动隔振单元和被动隔振单元以串联的方式组成。如图1所示, $m_t$ 为隔振对象; $k_a, c_a$  分别为主动隔振单元的刚度和阻尼; $F_a$ 为主动隔振单元输出力; $m_s$ 为中间体; $k_p, c_p$  分别为被动隔振橡胶的刚度和阻尼; $x_t, x_s, x_0$  分别为隔振对象、中间质量和系统干扰的位移响应。

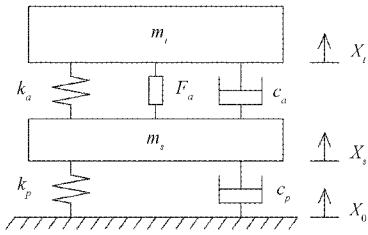


图1 双层隔振系统模型

### 1.2 双层隔振系统动力学方程和状态方程

由图1可以得出隔振系统动力学方程:

$$\begin{cases} m_t \ddot{x}_t = -k_a(x_t - x_s) - c_a(\dot{x}_t - \dot{x}_s) + F_a \\ m_s \ddot{x}_s = k_a(x_t - x_s) + c_a(\dot{x}_t - \dot{x}_s) - k_p(x_s - x_0) - c_p(\dot{x}_s - \dot{x}_0) - F_a \end{cases} \quad (1)$$

定义状态变量为  $\mathbf{X} = [x_t, x_s, \dot{x}_t, \dot{x}_s]^T$ 、系统输入为  $\mathbf{U}$ 、外界激励为  $\mathbf{W}$ 、输出为  $\mathbf{Y}$ ,可得到状态空间如式(2)所示。经验证,系统完全能观能控。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} + \mathbf{EW} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{CX} + \mathbf{DU} \end{cases} \quad (2)$$

其中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_a}{m_t} & \frac{k_a}{m_t} & -\frac{c_a}{m_t} & \frac{c_a}{m_t} \\ \frac{k_a}{m_s} & -\frac{k_a+k_p}{m_s} & \frac{c_a}{m_s} & -\frac{c_a}{m_s} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_t} \\ -\frac{1}{m_s} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_p}{m_s} & \frac{c_p}{m_s} \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{k_a}{m_t} & \frac{k_a}{m_t} & -\frac{c_a}{m_t} & \frac{c_a}{m_t} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ m_t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 1.3 双层隔振系统控制模型

采用LQR控制方法,以隔振对象的加速度、位移作为控制目标,得性能指标函数:

$$J = \int_0^\infty (q_1 \ddot{x}^2 + q_2 x^2 + r F_a^2) dt \quad (3)$$

式中: $q_1, q_2, r$ 为  $x, \dot{x}, F$  的加权系数。设  $\mathbf{Q}_0 = \text{diag}(q_1, q_2)$ ,  $\mathbf{R}_0 = \text{diag}(r)$ ,因此式(3)可写成:

$$\begin{aligned} J = & \int_0^\infty (\mathbf{Y}^\top \mathbf{Q}_0 \mathbf{Y} + \mathbf{U}^\top \mathbf{R}_0 \mathbf{U}) dt = \\ & \int_0^\infty (\mathbf{X}^\top \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{U}^\top \mathbf{R} \mathbf{U} + 2 \mathbf{X}^\top \mathbf{N} \mathbf{U}) dt \end{aligned} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}_0 \mathbf{C}$ ;  $\mathbf{R} = \mathbf{D}^\top \mathbf{Q}_0 \mathbf{D} + \mathbf{R}_0$ ;  $\mathbf{N} = \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}_0 \mathbf{D}$ ,以性能指标函数最小为目标,得到最优控制力:

$$\mathbf{U} = -\mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P} \mathbf{X} = -\mathbf{K} \mathbf{X} \quad (5)$$

$\mathbf{P}$ 由  $\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P} + \mathbf{Q}_0 = 0$ (Riccati方程)得出,求得反馈矩阵  $\mathbf{K}$ 。

## 2 贪婪Lévy PSO算法

将传统PSO算法与Lévy飞行原理结合,引用贪婪原则选择,对加权系数进行寻优,得到最优的加权系数组合。

### 2.1 PSO算法

对PSO位置更新公式做如下更改,舍弃速度项,由位置项控制粒子的位置更新<sup>[6]</sup>:

$$x_{ij}^{k+1} = \omega x_{ij}^k + c_1 r_1 (P_{ij}^k - x_{ij}^k) + c_2 r_2 (G_j^k - x_{ij}^k) \quad (6)$$

式中: $x_{ij}^{k+1}$ 为第  $k+1$  代种群第  $i$  个体的  $j$  维度元素;  $\omega$  为惯性因子;  $c_i$  为学习因子;  $r_i$  为随机值;  $P_{ij}^k$  为第  $k$  代种群里的最优个体,  $G_j^k$  为截止到第  $k$  代的全局最优位置。

### 2.2 Lévy PSO算法

首先通过PSO算法产生种群,其次通过Lévy飞行算法进行大步长位置更新<sup>[7]</sup>。采用Lévy飞行在PSO算法式(6)产生种群基础上进行寻优的位置更新合并公式为:

$$x_{ij}^{k+1} = \omega x_{ij}^k + c_1 r_1 (P_{ij}^k - x_{ij}^k) + c_2 r_2 (G_j^k - x_{ij}^k) \quad (7)$$

$$x_{Levy,ij}^{k+1} = x_{ij}^{k+1} + \alpha \odot Levy(\beta) \quad (8)$$

式中: $x_{Levy,ij}^{k+1}$ 为第  $k+1$  代个体于第  $k+1$  代PSO个体的基础上进行飞行得到的新个体;  $\alpha$  为缩放步长;  $\odot$  为点乘;  $\beta \in [1, 2]$ ,一般取  $\beta = 1.5^{[8]}$ ,  $Levy(\beta)$ 是通过Lévy飞行得出的步长,使用Mantegna方法,如式(9)所示,模拟Lévy飞行。

$$Levy(\beta) = \frac{\mu}{|v|^{\frac{1}{\beta}}} \quad (9)$$

式中: $\mu \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $v \sim N(0, 1)$ ,  $\sigma^2 = \left( \frac{\Gamma(1+\beta) \sin(\frac{\pi\beta}{2})}{\Gamma(\frac{1+\beta}{2}) \beta^2 (\frac{\beta-1}{2})} \right)^{1/\beta}$ ,

$\Gamma$ 为标准  $\Gamma$  函数。

### 2.3 贪婪原则

引用贪婪原则对原个体和飞行后个体进行筛选,达到所得结果为最优的目的。贪婪原则如下:

$$x_{final_{ij}} = \begin{cases} x_{Levy_{ij}}, & fit(x_{Levy_{ij}}) \leqslant fit(x_{ij}) \\ x_{ij}, & fit(x_{ij}) < fit(x_{Levy_{ij}}) \end{cases} \quad (10)$$

式中:  $fit(\cdot)$  为适应度函数。由此形成一种贪婪 Lévy PSO 算法流程。

## 3 贪婪 Lévy PSO 算法优化 LQR 权值

### 3.1 适应度函数

为解决不同变量之间单位和数量级不同的问题,对加速度和位移指标  $\dot{x}$ 、 $x$  做归一化处理,因精密仪器对振动加速度和振动位移均有严格要求<sup>[9]</sup>,为做到两控制指标较为均衡,添加权重系数  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ ,选择如下适应度函数:

$$fit(q_1, q_2) = \min \left[ \frac{\Delta_1 RMS_x(q_1, q_2)}{RMS_{\dot{x}_{pas}}(q_1, q_2)} + \frac{\Delta_2 RMS_{\dot{x}}(q_1, q_2)}{RMS_{x_{pas}}(q_1, q_2)} \right] \quad (11)$$

式中:  $RMS_x(q_1, q_2)$ 、 $RMS_{\dot{x}_{pas}}(q_1, q_2)$ 、 $RMS_{\dot{x}}(q_1, q_2)$ 、 $RMS_{x_{pas}}(q_1, q_2)$  分别为主动/被动状态时加速度/位移均方根值。

上述 4 种均方根值均可由式(12)得出,则:

$$RMS_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (12)$$

式中:  $x_i = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  为信号长度为  $N$  的时间序列。

与控制目标对应的权值元素  $q_1, q_2$  对系统性能影响很大,保证要求输出力在允许输出力范围内的情况下,可取为:

$$q_1, q_2 \in (10^{-1}, 10^0)$$

控制输入单一时可取  $R = 1^{[3]}$ 。

### 3.2 贪婪 Lévy PSO 算法优化 LQR 加权值

贪婪 Lévy PSO 算法优化双层隔振系统 LQR 控制权重参数流程如图 2 所示。

具体计算流程如下:

- 1) 参数初始化,包括算法相关参数和模型相关参数。
- 2) 生成初代粒子种群,得出适应度函数值,筛选种群最适应度值及个体及全局最优适应度值及个体。

3) 先采用式(7)进行普通粒子群方法位置更新,后采用式(8)进行 Lévy 飞行位置更新,并进行个体变化范围约束,将新个体赋值给  $q_1, q_2$ ,重复步骤 2)。

4) 采用贪婪原则,对式(3)中得出的个体进行比较得出最优。

5) 现种群最优个体适应度值与原全局最优适应度值进行比较,若小于则对原全局适应度值及个体进行替换。

6) 是否达到终止条件,是-下一步,否-返回步骤 3)。

7) 满足终止条件时可得最终优化结果。

## 4 仿真验证

### 4.1 参数设置

为验证在满足作用器动力输出范围内,所得控制参数

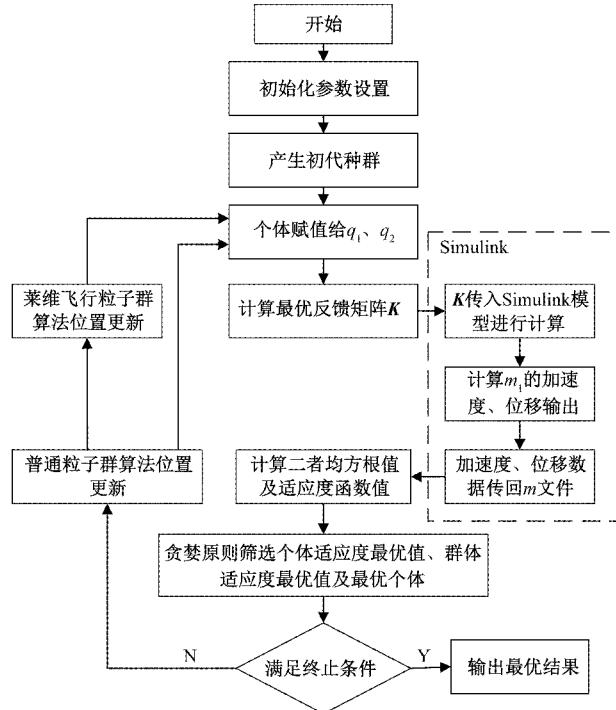


图 2 贪婪 Lévy PSO 算法优化 LQR 权值流程

组合的隔振效果,通过 MATLAB/Simulink 建立 1.2 隔振系统模型和 1.3 控制系统模型,进行仿真验证,选用磁致伸缩作用器做动力输出。

仿真参数设置为<sup>[10 11]</sup>:  $m_1 = 250 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 60 \text{ kg}$ ;  $k_1 = 8.747 \times 10^7 \text{ N/m}$ ;  $k_2 = 2.278 \times 10^6 \text{ N/m}$ ;  $c_1 = 9.3 \times 10^3 \text{ N/s}\cdot\text{m}$ ;  $c_2 = 604.19 \text{ N/s}\cdot\text{m}$ ;  $\omega = 0.7298$ ; 学习因子:  $c'_1 = c'_2 = 1.4962$ ; 粒子群规模为 25; 最大迭代次数为 100。

### 4.2 仿真实验验证及结果分析

双层隔振系统主动控制 Simulink 模型如图 3 所示,通过 To workspace 模块实现模型数据与 m 函数相联系,磁致伸缩作用器最大输出力为 500 N<sup>[12]</sup>,加入限幅模块模拟作用器最大输出力。

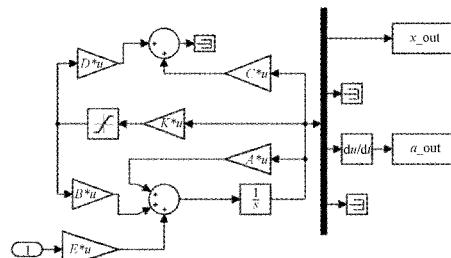


图 3 双层隔振系统主动隔振 Simulink 模型

采用 0~50 Hz 扫频信号作为外部干扰输入<sup>[13]</sup>,经贪婪 Lévy PSO 算法优化后,得出粒子分布图如图 4 所示,将最终迭代结果的粒子分布情况如图 5 所示做统计并以各区间粒子分布个数的方差作为评判标准进行均匀度分析<sup>[14]</sup>。PSO 算法产生  $q_1, q_2$  种群个数方差分别为 59 661.16、

42 934.16;贪婪 Lévy PSO 算法产生  $q_1, q_2$  种群个数方差分别为 310.96, 190.56。可见,较 PSO 算法的种群“聚集”情况,贪婪 Lévy PSO 算法产生的种群分布更为均匀,在此基础上通过贪婪原则进行个体选择,更有利于发现全局最优解。

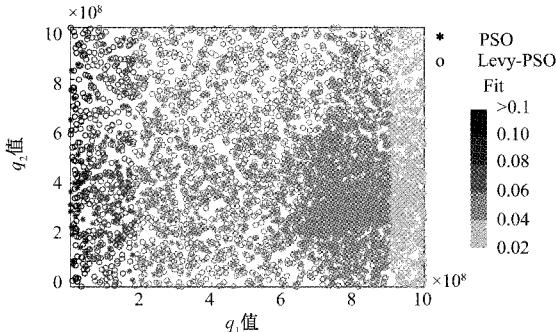


图 4 粒子分布图(变为灰阶)

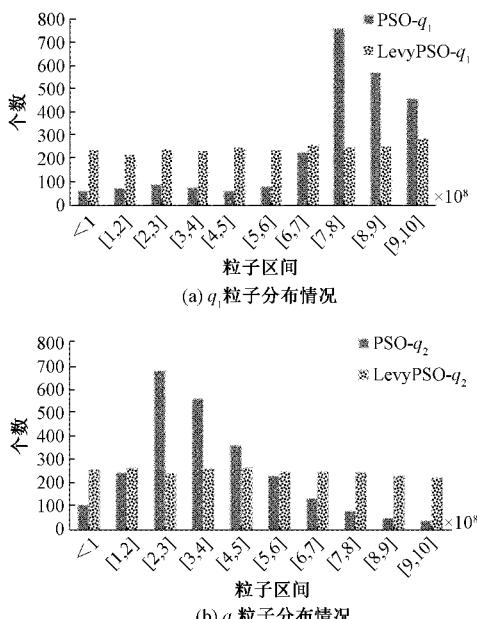


图 5 粒子分布统计

最终迭代情况,如图 6 所示,贪婪 Lévy PSO 算法可有效实现寻得更多样化的种群从而提高收敛速度。

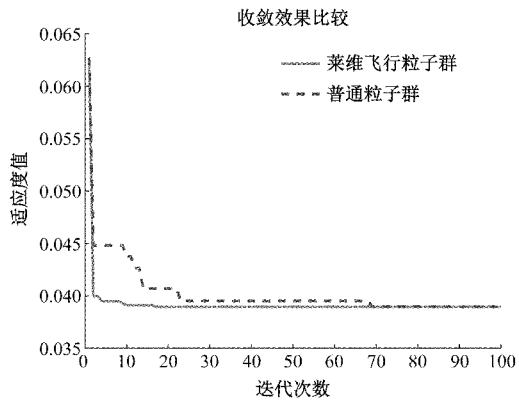


图 6 迭代曲线

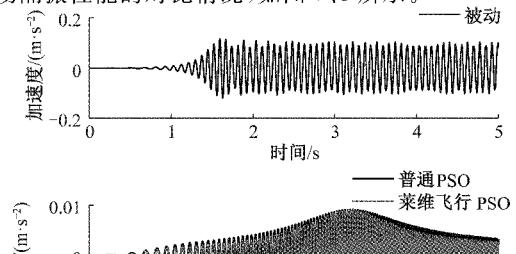
PSO 算法和贪婪 Lévy PSO 算法寻得的权值最优组合及适应度函数值,如表 1 所示。

表 1 寻优结果

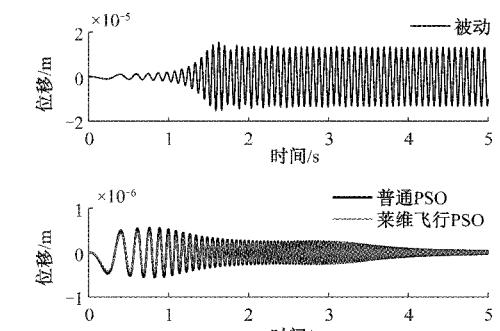
参数	PSO	Lévy PSO
$q_1$	$9.9997 \times 10^8$	$9.9998 \times 10^8$
$q_2$	$1.5441 \times 10^8$	$3.5852 \times 10^8$
$fit$	0.038968	0.038965
迭代次数	68	17

由表 1 可见,二者寻得的权值最优组合不同,但适应度函数值近似相同,因此可认为所得到的权值组合为最优解。从迭代次数上看,由于 PSO 算法的寻优方式会导致在寻优后期产生种群聚集,进而导致迭代次数较多,从而降低收敛速度。因此对 PSO 算法寻优方式进行改进,增加种群的多样性,解决了上述不足,结果显示贪婪 Lévy PSO 算法比 PSO 算法的收敛速度快 75%,达到了全局寻优和快速收敛的目的,为实时运算提供了一定的基础<sup>[15]</sup>。

由于贪婪 Lévy PSO 算法在寻优方式上的改进,可以使其寻得次优解的时间大大缩短,在第 8 次迭代时,相较 PSO 算法,可以寻得更为优异的次优解,而次优解与最优解之间相差很小,可以认为其与最优解所产生的隔振效果近似相同,因此以第 8 次迭代时的结果作对比分析。分别采用 0~50 Hz 扫频信号及服从正态分布  $N(0,1)$  的随机信号作为激励,得出隔振对象加速度/位移的时域响应,以及与被动隔振性能的对比情况,如图 7、8 所示。



(a) 扫频激励-隔振对象加速度对比



(b) 扫频激励-隔振对象位移对比

图 7 扫频激励加速度/位移响应

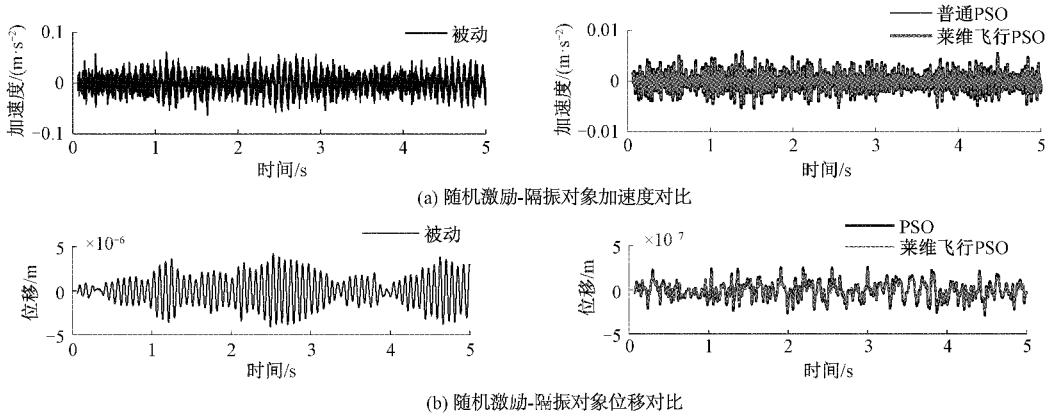


图8 随机激励加速度/位移响应

由图7、8可见,在两种激励情况下,通过优化算法得出的次优解所产生的隔振效果均非常明显,并且贪婪 Lévy PSO 算法比 PSO 算法隔振效果更佳。由表 2、3 可见,在扫频激励和

随机激励的情况下,以加速度均方根值和位移均方根值作为性能指标,贪婪 Lévy PSO 算法对 PSO 算法的改进效果分别为 9.96% 和 16.16%,12.53% 和 16.5%,提升效果明显。

表2 扫频激励隔振性能

性能指标	被动	PSO(隔振效果)	Levy PSO(隔振效果)	改进效果
加速度均方根值/(m·s <sup>-2</sup> )	$5.8377 \times 10^{-2}$	$3.6491 \times 10^{-3}$ (93.75%)	$3.2857 \times 10^{-3}$ (94.37%)	9.96%
位移均方根值/m	$8.0525 \times 10^{-6}$	$2.1845 \times 10^{-7}$ (97.29%)	$1.8315 \times 10^{-7}$ (97.73%)	16.16%

表3 随机激励隔振性能

性能指标	被动	PSO(隔振效果)	Levy PSO(隔振效果)	改进效果
加速度均方根值/(m·s <sup>-2</sup> )	$1.8042 \times 10^{-2}$	$1.6923 \times 10^{-3}$ (96.61%)	$1.4802 \times 10^{-3}$ (97.87%)	12.53%
位移均方根值/m	$1.6587 \times 10^{-6}$	$9.6897 \times 10^{-8}$ (94.16%)	$8.091 \times 10^{-8}$ (95.12%)	16.5%

## 5 结论

采用了基于贪婪 Lévy PSO 算法的双层精密隔振平台的 LQR 控制方法,在 PSO 算法基础上加入 Lévy 飞行理论和贪婪选择原理,有效提升了种群多样性,提升了寻优速度并一定程度上避免了局部收敛,更好地实现全局搜索。

仿真结果表明,较被动隔振,贪婪 Lévy PSO 算法得出的 LQR 最优权值组合对扫频激励及随机激励的加速度和位移削弱效果明显,隔振效果有较大的提升,实现了更便捷有效地对 LQR 控制权值进行选择。本文未对在该优化方法下得到的 LQR 控制进行实时控制验证,对于解决实际问题还需要继续探究。

## 参考文献

- [1] MIYAMOTO K, SATO D, SHE J. A new performance index of LQR for combination of passive base isolation and active structural control [J]. Engineering Structures, 2018, 157: 280-299.
- [2] 汤伟,胡祥满. 基于模拟退火算法的 PID 参数优化研究[J]. 组合机床与自动化加工技术,2018(4):92-96,101.
- [3] 蔡聪仁,向凤红. 基于遗传算法优化 PID 的板球系统位置控制[J]. 电子测量技术,2019,42(23):97-101.
- [4] FENG H, MA W, YIN C B, et al. Trajectory control of electro-hydraulic position servo system using improved PSO-PID controller [J]. Automation in Construction, 2021, 127: 103722.
- [5] 张真诚. 机器人路径规划的改进粒子群-蚁群算法[J]. 电子测量技术,2021,44(8):65-69.
- [6] 李荣雨,王颖. 基于 Lévy 飞行的改进粒子群算法[J]. 系统仿真学报,2017,29(8):1685-1691,1701.
- [7] IACCA G, SANTOS JUNIOR V C D, MELO V V. An improved Jaya optimization algorithm with Lévy flight[J]. Expert Systems with Applications, 2021, 165: 113902.
- [8] MOHSENI S, BRENT A C, BURMESTER D, et al. Lévy-flight moth-flame optimisation algorithm-based micro-grid equipment sizing: An integrated investment and operational planning approach[J]. Energy and AI, 2021, 3: 100047.
- [9] 张刘,王泰雷,郑潇逸,等. 微纳型空间相机被动式隔振系统设计[J]. 仪器仪表学报,2021,42(2):18-25.
- [10] 李沛东. 主动/半主动混合隔振器设计与切换控制研

- 究[D]. 重庆:重庆大学,2016.
- [11] 张旭辉. 超磁致伸缩作动器优化及主动隔振控制研究[D]. 北京:北京航空航天大学,2008.
- [12] 晋宏炎,鞠晓君,辛涛,等. 偏置磁场对超磁致伸缩致动器输出特性的影响分析[J]. 传感技术学报,2017, 30(12):1862-1868.
- [13] 张闻,张方,姜金辉. 主动式动力反共振隔振系统控制策略研究与仿真[J]. 国外电子测量技术,2015, 34(10):17-21.
- [14] HOUSSEIN E H, SAAD M R, HASHIM F A, et al. Lévy flight distribution: A new metaheuristic

algorithm for solving engineering optimization problems[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2020, 94:103731.

- [15] 宁小玲,刘忠,冯成旭,等. 快速收敛变换域自适应滤波算法[J]. 电子测量与仪器学报,2011,25(3):240-245.

### 作者简介

范伟,硕士研究生,主要研究方向为振动控制。

E-mail:706623749@qq.com

孟江(通信作者),博士,副教授,主要研究方向为振动控制。

E-mail:johnmeng@nuc.edu.cn