

Lyapunov 指数算法在微弱信号检测中的应用

王冀超 杨正华 岳亮 廖文鹏

(长安大学地质工程与测绘学院 西安 710054)

摘要: 基于 MATLAB/Simulink 仿真软件, 分析了 Holmes-Duffing 系统检测弱正弦信号的原理和仿真实验步骤。通过仿真结果表明, 直接从相平面图中肉眼观察混沌临界状态的阈值容易存在较大的人为误差。针对这个问题, 提出了利用 Lyapunov 指数算法来定量地分析系统的动力学特征, 并进一步研究了最大 Lyapunov 指数与系统状态之间的关系。对临界区域进一步取值发现其 LE 指数在零点振荡跳跃说明了该混沌系统正处于间歇临界态。最后通过对信噪比为 -40 dB 的微弱信号进行检测来说明, 采用 Lyapunov 指数算法能够更直观地判断微弱信号的存在, 证明其检测方法的可行性。

关键词: 微弱信号检测; Holmes-Duffing 混沌振子; 相平面图; 临界阈值; Lyapunov 指数

中图分类号: TP391.9; TN911.23 文献标识码: A 国家标准学科分类代码: 510.4010

Application of Lyapunov exponent algorithm in the weak signal detection

Wang Jichao Yang Zhenghua Yue Liang Liao Wenpeng

(School of Geological and Surveying Engineering, Chang'an University, Xi'an 710054, China)

Abstract: Based on the Matlab/Simulink simulation software, the principle of the weak sine signal detection and the simulation experiment steps are analyzed in the Holmes-Duffing system. The simulation results show that there is a large human error in the threshold value of the chaotic state directly from the phase diagram. Aiming at this problem, the Lyapunov exponent algorithm is proposed to quantitatively analyze the dynamic characteristics of the system and research the relationship between the maximal Lyapunov exponent and the system state. The further analysis of the critical region discovers that the LE exponent in the zero oscillation shows that the chaotic system is in the intermittent criticality. Finally, the weak signal with signal to noise ratio of -40 dB is tested to show that the Lyapunov exponent algorithm can judge the existence of weak signals more accurately, which proves the feasibility of the detection method.

Keywords: weak signal detection; Holmes-Duffing chaotic oscillator; phase plane plot; critical threshold; Lyapunov exponent

0 引言

混沌理论作为 20 世纪物理科学领域中三大重大革命之一, 其最重要意义在于割断了牛顿物理学的基本原则。正如第一次国际混沌会议主持人 J. Ford 所说, “混沌排除了拉普拉斯决定论的可预见性的狂想^[1]”。混沌理论的快速发展给自然科学、工程技术等许多领域提供了一种全新的研究手段。从强噪声中提取微弱有用信号一直是近代信息处理的一个重大内容, 但由于众多自然物理现象存在着分形和混沌特性, 故用基于线性理论的传统信号处理方法解决非线性问题难免具有一定的局限性^[2]。自从 Birx 在 1992 年将混沌理论应用在微弱信号检测以来, 国内外学者利用其在初始条件下的敏感依赖性和对零均值噪声的强免疫性等优点, 掀起了基于混沌理论检测微弱信号的热潮, 并

取得了不错的研究成果。文献[3]利用混沌振子具有大尺度周期相态相应的特性恢复了共炮点地震资料中的弱有效同相轴; 文献[4]提出了一种基于信号分割的预处理方法, 该方法通过对待测信号进行分割、叠加、延拓可获得更低的信噪比下限; 文献[5]基于三维 Duffing 系统模型, 通过二进制数字信息手段控制系统参数从而实现保密通信。文献[6]针对 Duffing 系统检测频率范围窄、需要多阵子阵列等缺点, 提出了一种新型检测方法, 降低了调谐难度并加强了运行时的稳定性。文献[7]应用 Runge-Kutta 方法和分形维数研究了 Duffing 系统两个重要参量的混沌驱动影响。

上述文献都是利用 Duffing 振子检测微弱特征信号, 需要调整参数使系统进入混沌临界状态, 并且需要找到准确的临界状态系统阈值, 阈值越接近真实值, 后续检测效果越好, 可以说是操作中最重要的一步。Duffing 振子系统是

否进入混沌状态有很多的判别方法,目前常用的方法是肉眼直接观察振子输出的相平面图,但这种方法人为误差大、效率低且存在一定的主观性,难以满足实际生产应用的需求。数值法可通过调节特征值大小来自动识别出 Duffing 振子输出相态,效率较高^[8]。而最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} 是否大于 0 可直观地判断出系统是否处在混沌状态,其实质是动态 Duffing 系统沿其相空间主轴发散或收敛的平均速度^[9]。若 $\lambda_{\max} < 0$,说明相邻轨道渐渐靠拢,系统处于大尺度周期状态;若 $\lambda_{\max} > 0$,则说明两条很近的轨道随时间的发展逐渐分离,系统处于混沌状态;当 λ_{\max} 由 > 0 向 < 0 转变时,说明这时系统从混沌态渐变到周期态,这个时刻对应的值就是系统阈值 γ_d (临界值)。

1 Duffing 振子检测微弱信号原理

由于 Duffing 系统存在着丰富的非线性动力学特性,其方程结构简单、阶数低等优点^[10],所以目前研究混沌系统检测微弱信号的计算振子一般采用 Duffing 振子,其标准形式如式(1)所示。

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (1)$$

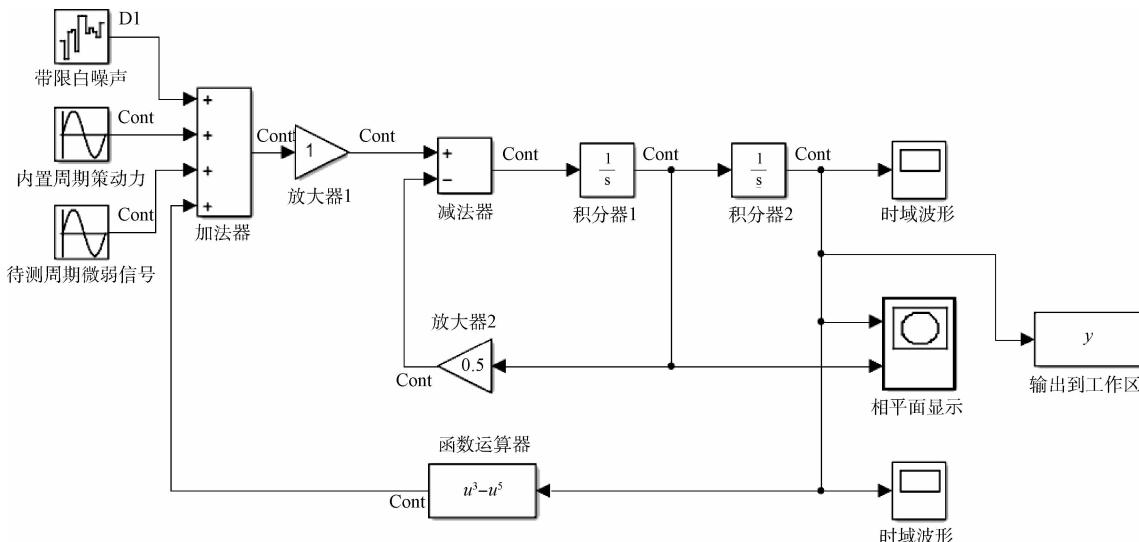


图 1 频率 $\omega=1$ rad/s 时的 Holmes-Duffing 振子系统仿真模型

当固定 k 值时,系统相轨迹会随着幅值 γ 的变化会呈现出不同变化:当 $\gamma=0$ 时,相平面中点 (x, \dot{x}) 最终收敛于两焦点($\pm 1, 0$)之一,如图 2(a)所示; γ 较小时,相轨迹表现为庞加莱映射意义上的吸引子,相点围绕其中一个焦点周期振荡;当超过一定阈值 γ_c 时系统依次历经图 2(b)所示同宿轨道、图 2(c)所示周期分岔、图 2(d)所示混沌轨迹、图 2(e)所示临界周期状态和图 2(f)所示大尺度周期状态。当处于大尺度周期状态时,相轨迹会收敛于焦点和鞍点。

当幅值 γ 增加到系统阈值 γ_d 时,相轨迹会呈现出临界混沌状态。可利用临界阈值 γ_d 减去当前系统幅值得到

式中: k 为阻尼比, $\alpha x + \beta x^3$ 为非线性恢复力, α, β 为实数因子, $\gamma \cos(\omega t)$ 为周期策动力, γ 和 ω 分别为策动力幅值、频率。

通过理论分析和仿真实验证明外力为方波的敏感程度远远大于正弦波,即对检测正弦微弱信号响应不敏感。本次研究的周期信号为正弦信号,因此要对非线性项 ($\alpha x + \beta x^3$) 进行改进。基于微弱信号的检测下限、检测信噪比、混沌判据证明等多方面综合考虑^[11],将非线性项改为 $(-x^3 + x^5)$,这时方程即为 Holmes-Duffing 方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ky + x^3 - x^5 + \gamma \cos(\omega t) + \text{input}(t) \end{cases} \quad (2)$$

$\text{Input}(t)$ 为待测的微弱信号,由同频微弱有用信号 $\gamma_0 \cos(\omega t)$ 和均值为 0 的高斯白噪声 $n(t)$ 组成。根据其动力学方程如式(2)所示,可建立 MATLAB/Simulink 下的 Duffing 系统仿真模型,如图 1 所示。阈值 γ_d 可预先确定,当 k 在 $0.2 \sim 0.5$ 范围取值时, γ_d/k 近似为常数 1.45^[12]。阻尼比 k 取 0.5,采用的计算方法是步长为的四阶 Runge-Kutta 算法,仿真时间为 1 000 s, $\gamma \neq 0$ 时初始状态为 $[x(0), \dot{x}(0)] = [0, 0]$ 。

混沌状态。1)若加入与周期策动力频率相差较大的微弱信号或白噪声,混沌系统不会改变原有的运行轨迹,只会使系统的运行轨道变得粗糙。图 3(a)是只加入均值为 0,功率为 0.002 8 W 的高斯白噪声后的临界混沌状态相位图。但进行微弱周期信号检测时输入噪声不能过大,否则会改变系统状态从而导致误判,最终影响系统的检测性能。2)接着加入待测的同频微弱正弦信号,信号幅值未知,系统会从混沌状态转变到大尺度周期状态,如图 3(b)所示。通过多次调试待测信号幅值 γ ,使系统重新回到临的 γ_1 就是所得的待测微弱信号幅值 0.000 07 V。此时检

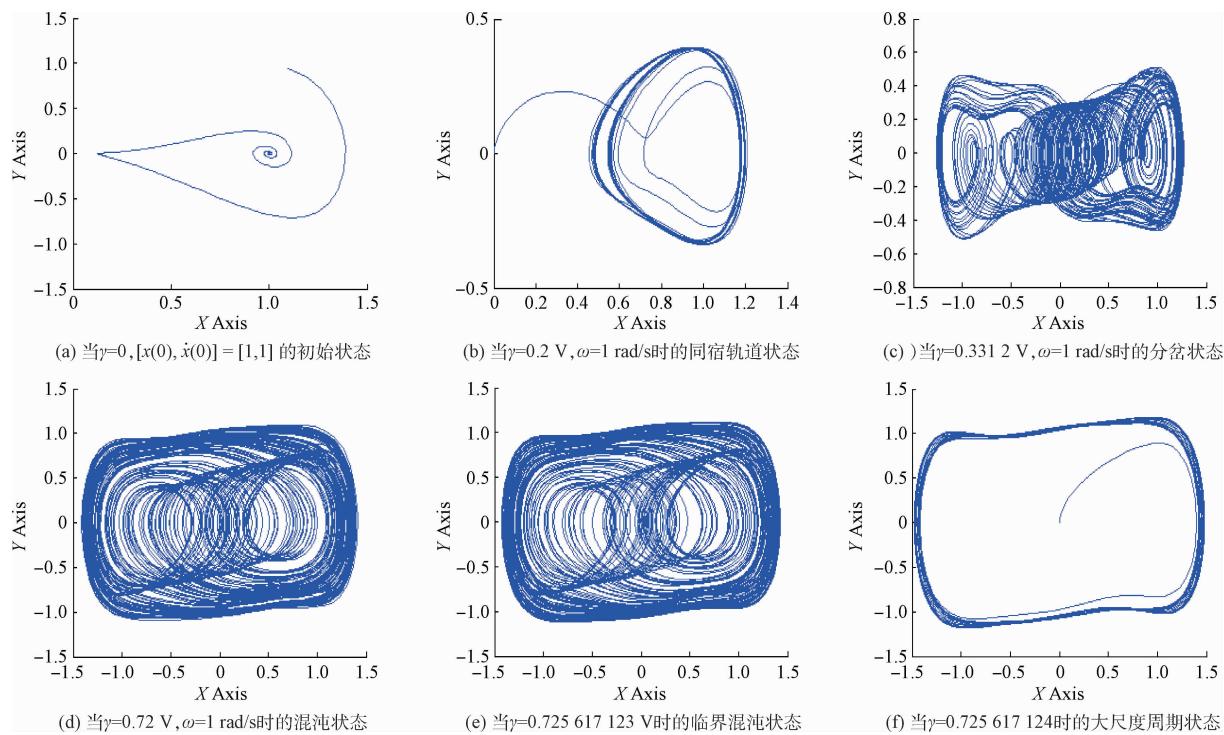


图 2 Duffing 系统在不同状态下的相平面

测系统检测信噪比为 $10 \lg(\text{周期信号功率}/\text{噪声方差}) = 10 \lg(0.5 \times 0.00007^2 / 0.0028) \approx -60.6 \text{ dB}$ 。

仅为 -10 dB , 可见利用混沌振子检测微弱信号具有有效性和优越性。

2 Lyapunov 指数法判别准则

混沌检测就是基于 Holmes-Duffing 系统状态的跃变来检测微弱信号的, 因此如何判别运动状态显得格外重要。目前最常用的数值法是 Lyapunov 指数法。

计算 Lyapunov 指数的方法主要有: 定义法、Jacobian 法、Wolf 法和小变量法。当系统方程已知且结构较简单时, 利用 Jacobian 法计算 Lyapunov 指数比较合适。

对于三维连续时间的非自治系统, 式(2)所对应 Poincare 映射的 Jacobi 矩阵为:

$$J(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3x^2 - 5x^4 & -k & -\gamma \sin(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Holmes-Duffing 系统的偏差方程为:

$$\ddot{\delta x} + k\dot{\delta x} - (3x^2 - 5x^4)\delta x = 0 \quad (4)$$

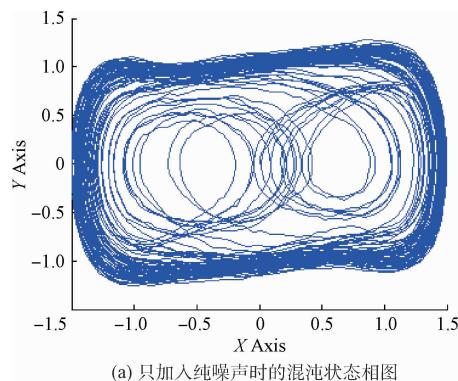
δx 为初始位置不同的两点 $x + \delta x$ 和 x 之间的误差, 将式(4)改写成状态方程形式

$$\begin{cases} \dot{\delta x} = \delta y \\ \dot{\delta y} = -k\delta x + c(t)\delta x \end{cases} \quad (5)$$

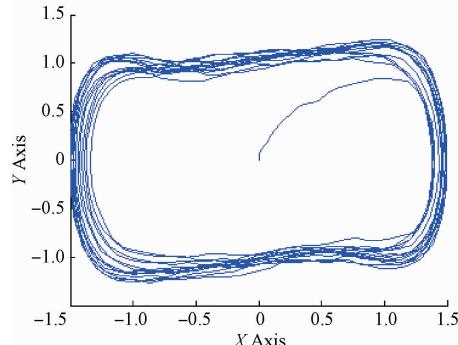
将式(5)改写为矢量微分方程形式

$$\frac{dX(t)}{dt} = J(t)X(t) \quad (6)$$

$J(t)$ 是上式的标准基本解矩阵, 所以必然满足



(a) 只加入纯噪声时的混沌状态相图



(b) 加入待测信号时的混沌状态相图

图 3 加入纯噪声和待测信号的相平面图

而目前用时域方法处理微弱信号的最低信噪比门限

$$d\ln D(t) = \frac{dD(t)}{D(t)} = J(t)dt \quad (7)$$

通过对两边进行积分,可得:

$$\begin{cases} \ln D(T) = \sum_{n=0}^{T/\Delta t} J(n\Delta t) \times \Delta t \\ D(T) = e^{\sum_{n=0}^{T/\Delta t} J(n\Delta t) \times \Delta t} = \prod_{n=0}^{T/\Delta t} e^{J(n\Delta t) \times \Delta t} \end{cases} \quad (8)$$

设矩阵 $D(T)$ 的特征值为 λ_1 和 λ_2 , 则两个 Lyapunov 指数可表示为

$$\begin{cases} l_1 = \frac{1}{T} \ln |\lambda_1| \\ l_2 = \frac{1}{T} \ln |\lambda_2| \end{cases} \quad (9)$$

利用 Lyapunov 指数判断 Holmes-Duffing 系统状态的基本原理是: 在混沌状态下, 两个 Lyapunov 特征指数至少一个大于 0; 在大尺度周期状态下, 两个 Lyapunov 指数均小于 0; 当最大 Lyapunov 特征指数 l_{\max} 由大于 0 转至小于 0, 就证明系统从混沌态跃变到周期态, LE(Lyapunov) 指数正负转变那一刻所对应的控制参数值就是系统阈值。当信号频率固定时, 通过调节内置信号幅值使系统中的一个 Lyapunov 指数为 0 值, 这时内置信号的幅值就是分叉阈值^[13]。

3 仿真实验分析

3.1 临界状态仿真

本文利用 LET 工具箱来计算 Duffing 系统的 Lyapunov 指数, 选用仿真时间为 1 000 s 处的 Lyapunov 指数值。图 4 表示检测系统由混沌状态向大尺度周期状态突变时 Lyapunov 指数谱的变化情况。当内置策动力信号幅值 $\gamma_1 = 0.733 3$ 时, $\lambda_{\max} > 0$, Holmes-Duffing 系统处在混沌状态; 当幅值 $\gamma_2 = 0.7334$ 时, $\lambda_{\max} < 0$, 系统处于大尺度周

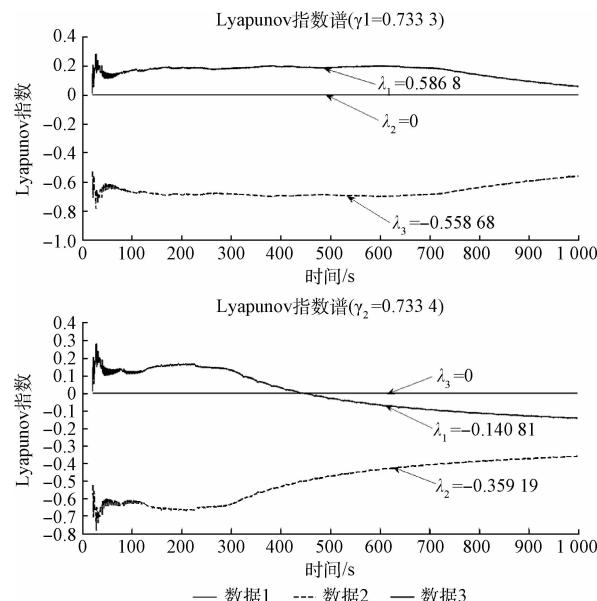


图 4 临界状态下的 Lyapunov 指数谱

期状态。由此可知, 该系统内置策动力的临界阈值在 [0.733 3, 0.733 4] 之间, 本次选用 $\gamma_2 = 0.733 4$ 为临界阈值。而理论分析中所得阈值为 0.725 617 124, 相对误差为 1.059%, 其误差在可控误差范围内, 说明该方法是可行的。

从图 4 中可以得知, 前期的迭代过程存在不稳定的过渡区域, 在此区域内 Lyapunov 指数的变化值是不稳定的。为了能够更加准确地反映系统的运动状态, 因此在后续步骤中不考虑前 70 次迭代。图 5 为系统在临界混沌状态和周期状态下的输出信号, 其观测区域为 500~800 s。可以看到, 当稍微改变系统阈值时, 混沌系统的输出信号会从无序混乱状态突变到有序周期状态。

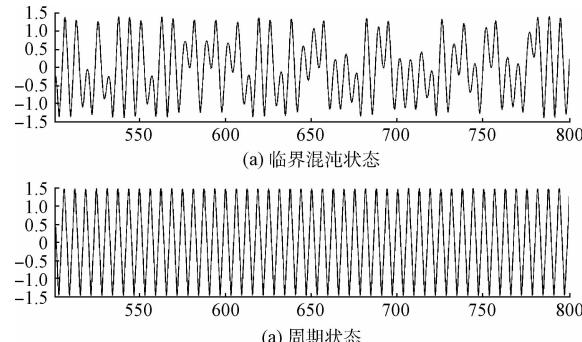


图 5 系统输出信号

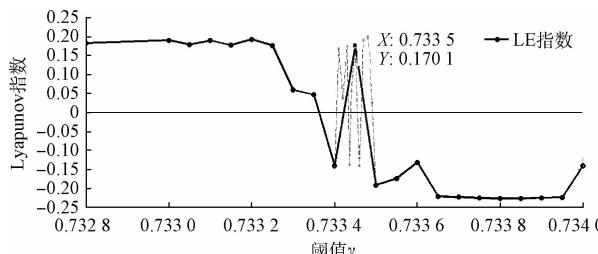
3.2 瞬时状态仿真

本仿真实验中, 系统内置策动力信号幅值 γ 在 [0, 1] 范围内选 50 个点, 计算其 Lyapunov 指数 l_1, l_2 , 并取其中 14 个代表值列入表 1 中, 同时画出 Holmes-Duffing 混沌振子的瞬态最大 Lyapunov 指数曲线(图 6)。

表 1 混沌检测系统的 Lyapunov 指数

γ	l_1	l_2
0.020 0	0.009 55	-0.500 96
0.200 0	-0.008 64	-0.491 35
0.260 0	-0.057 28	-0.442 72
0.450 0	0.118 08	-0.618 08
0.550 0	0.031 54	-0.531 54
0.650 0	0.172 8	0.181 76
0.700 0	-0.672 8	-0.681 76
0.733 3	0.058 68	-0.558 68
0.733 4	-0.140 81	-0.359 19
0.740 0	-0.226 91	-0.273 09
0.780 0	-0.159 31	-0.340 69
0.820 0	-0.242 05	-0.257 95
0.900 0	-0.221 46	-0.247 37
0.960 0	-0.278 54	-0.252 63

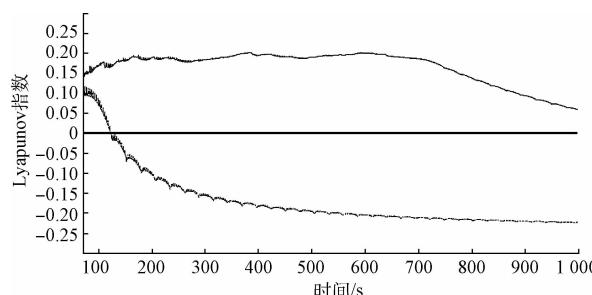
仿真实验中所得到的临界阈值与理论分析存在误差,

图 6 $[0.732.8, 0.734]$ 区间内的最大 Lyapunov 指数

其主要来源于:1)在确定偏差方程项 $3x^2 - 5x^4$ 时,省略掉了 $\delta(x)$ 的高阶无穷小项;2)在选取计算周期时是采用定步长取值的,会在输入不同幅值情况下受到暂态不同的影响,造成取值偏离理论区域^[14]。

发现 $\gamma=0.733.45$ 时,最大 Lyapunov 指数出现正值。通过对 $[0.733.4, 0.733.5]$ 区域内进一步取值(见图 6 中带叉点的虚线),可以说明系统在 $[0.733.4, 0.733.5]$ 期间内处于间歇混沌态,其最大 LE 指数在 0 点附近振荡跳跃,同时也说明了该系统正处于临界状态。

利用最大 Lyapunov 指数检测微弱信号的仿真结果如图 7 所示。图 7 为只输入纯噪声时和输入信噪比为 -40 dB 的周期信号时的仿真对比结果(零轴上方的实线是输入均值为 0, 功率为 $0.002.8$ W 的高斯白噪声的最大 LE 指数, 零轴下方的虚线是噪声背景下输入幅值为 $0.000.7$ V 微弱信号的最大 LE 指数)。前 70 次仿真为不稳定迭代,因此采取切除方式不予考虑。

图 7 输入白噪声时和输入信噪比为 -40 dB 时的仿真结果

从仿真结果看出:当输入信号为纯白噪声时,系统仍处于混沌状态,这时最大 Lyapunov 指数为 $0.058.68$;而当有微弱信号输入时,系统状态发生跃变,这时最大 Lyapunov 指数为 $-0.226.5$,说明系统处于大尺度周期状态。仿真结果与理论分析是一致的。因此利用最大 Lyapunov 指数可准确地确定系统相变的临界阈值和瞬时状态,并且直观地检测微弱信号的存在。

4 结 论

深入分析了 Holmes-Duffing 混沌振子检测微弱正弦信号的原理和步骤,通过仿真实验证明利用 Duffing 系统

检测弱信号存在可行性。同时阐述 Lyapunov 指数检测微弱信号的原理,并利用 Lyapunov 指数定量地分析了混沌检测系统在临界状态和瞬时状态的动力学特征。仿真实验证明 Lyapunov 指数算法可准确地计算出系统处于临界状态下的内置策动力幅值,可很大程度上克服肉眼直接观察相平面图所带来的人为误差。但通过结果分析,该方法仍然存在计算误差、不稳定状态区域等缺陷,在后续工作中需针对这两方面进行改进。最后通过对信噪比为 -40 dB 微弱信号进行检测从而说明:利用最大 Lyapunov 指数可以直观地判别出混沌振子检测系统的临界状态,以及有效地检测出强高斯白噪声背景下的微弱信号,从而提高 Duffing 振子检测微弱周期信号的准确性和适用性。

参 考 文 献

- [1] GLEICKJ 著,张淑誉译.混沌-开创新科学 [M].北京:高等教育出版社,2014.
- [2] 张开元,娄伯信,黄敏.分形理论在地球物理中的应用 [J].中国西部科技,2014,13(1):6-7.
- [3] 李月,杨宝俊,袁野,等.混沌振子检测系统的弱有效地震信号检测能力 [J].科学通报,2006,51(14):1710-1716.
- [4] 芮国胜,刘林芳,张嵩.基于信号预处理的杜芬振子弱信号检测方法 [J].电子测量技术,2016,39(4):129-132.
- [5] 韩建群,刘允峰.一种基于三维杜芬系统的混沌参数调制方法 [J].国外电子测量技术,2015,34(7):24-27.
- [6] 刘林芳,芮国胜,张洋,等.基于 Duffing 振子的弱信号频率检测研究 [J].电子测量技术,2016,39(3):146-150.
- [7] SALAU T A O, AJIDE O O. Fractal characterization and comparison of chaos impact of excited Duffing oscillator parameters [J]. International Journal of Engineering Science and Technology,2013,5(3):547-554.
- [8] 张刚.基于 Melnikov 函数 Duffing 系统微弱信号检测 [J].电子测量技术,2015,38(1):109-112.
- [9] 宋春云,丁士圻,雷亚辉.最大 Lyapunov 特性指数在微弱信号检测中的应用 [J].声学技术,2007,26(1):126-129.
- [10] 陈新国,王洁芸.混沌振子在不同初值下检测弱信号的性能分析 [J].仪器仪表学报,2012,33(12):2857-2862.
- [11] 袁野.基于混沌理论的微弱信号检测与勘探地震学中同相轴的恢复 [D].长春:吉林大学,2006.
- [12] 张林,王莲芬,宁小磊,等.基于 Duffing 振子的微弱正弦信号检测研究与仿真 [J].传感技术学报,2009,22(8):1137-1141.