

# 几种典型 Nakagami-m( $m < 1$ )衰落信道仿真方法性能比较

吴猜 周涛 李方华 张燕华

(河海大学 计算机与信息学院 南京 211100)

**摘要:**近年来 Nakagami-m 衰落信道仿真模型的研究成为热点。为了得到最佳的衰落信道仿真模型,首先介绍了3种 Nakagami-m( $m < 1$ )衰落信道仿真方法,分别是基于 Beta 函数仿真方法、基于近似逆累积分布函数仿真方法以及基于正弦求和仿真方法,通过 Matlab 仿真软件得到3种方法的幅度、相位以及包络自相关函数仿真图,比较分析得出基于近似逆累积分布函数变换的仿真方法最好,其次是基于 Beta 函数仿真方法,基于正弦求和方法效果最不理想。

**关键词:**衰落信道;Beta 函数;正弦求和;近似逆变换

中图分类号: TN911.22 文献标识码: A 国家标准学科分类代码: 510.1040

## Performance comparison of several typical Nakagami-m ( $m < 1$ ) fading channel simulation methods

Wu Cai Zhou Tao Li Fanghua Zhang Yanhua

(College of Computer and Information, Hohai University, Nanjing 211100, China)

**Abstract:** With the continuous development of wireless communication technology, the research of Nakagami-m fading channel simulation model has been a hot spot. In order to get the best simulation model of fading channel, three simulation methods of Nakagami-m ( $m < 1$ ) fading channel are introduced, which are based on Beta function simulation method, approximate inverse cumulative distribution function simulation method and sinusoidal summation simulation method. The simulation maps of amplitude, phase and envelope autocorrelation function of the three methods are obtained by Matlab simulation software, and the results are compared and analyzed. The simulation method based on approximate inverse cumulative distribution function transformation is the best, followed by the Beta function simulation method, and the sinusoidal summation method is the most unsatisfactory.

**Keywords:** fading channel; Beta function; sine summation; approximate inverse transformation

## 0 引言

在对高频(high frequency, HF)电离层信道的仿真研究中,瑞利分布一直被认为是最适合模拟高频电离层信道的短期衰落特性的<sup>[1]</sup>。然而,由于 HF 信道的高变化性,衰落可能比瑞利衰落更严重,Nakagami<sup>[2]</sup>在对长距离 HF 通信链路的一系列信道测量中观察到比瑞利衰落更严重的衰落现象。虽然 Nakagami-m 衰落信道模型在  $m > 1$  的情况下得到广泛的应用<sup>[3-5]</sup>,但是研究衰落参数  $m$  在  $[0.5, 1]$  范围内的 Nakagami-m 衰落信道也是非常有意义的,有利于对长距离 HF 电离层信道进行建模。

本文主要是对3种 Nakagami-m( $m < 1$ )衰落信道仿真模型性能进行比较分析。首先,分别介绍了基于 Beta 函数

仿真模型<sup>[6]</sup>、基于近似逆累积分布函数仿真模型<sup>[7]</sup>以及基于正弦求和仿真模型<sup>[8]</sup>,其次通过 Matlab 仿真比较3者的性能优劣性,并得出结论。

## 1 信道模型

基于 Beta 函数仿真方法仅限于  $m < 1$  的情况,这是由于 Beta 函数的局限性导致的。 $z(t) = r(t)e^{j\theta(t)}$  是一个广义平稳(WSS)复随机过程,其自相关函数为:

$$R_z(t) = E\{z(t) \times z^*(t + t)\} \quad (1)$$

并且满足以下特性:  $r(t)$  服从 Nakagami-m 分布,其中,二阶矩  $\Omega = R_z(0)$ ,衰落参数  $m = \Omega^2/E\{(r(t)^2 - \Omega)^2\}$ ,取值范围是  $m \in [0.5, 1]$ ;  $\theta(t)$  在  $[0, 2\pi]$  服从均匀分布; 第  $r(t)$  和  $\theta(t)$  相互独立。最终得到  $r(t)$  在任意时间  $t$  的概率密度函数

$$p(r(t) = r) = \begin{cases} \frac{2m^m r^{m-1}}{\Gamma(m) \Omega^m} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right) & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\Gamma(\cdot)$  是 Gamma 函数;  $m \in [0.5, 1]$ 。下面的任务就是开发一个仿真模型获得  $z(t)$ 。

由文献[9]可知, Beta 函数可以由 2 个 Gamma 函数的比值得到, Nakagami-m 随机变量、瑞利随机变量的平方均服从 Gamma 分布, 由此可得:

$$r_z = \sqrt{\xi} r_w \quad (3)$$

式中:  $\xi$  是一个与  $r_w$  无关的非负随机变量, 并且,  $\xi$  是具有参数  $m$  和  $1-m$  的标准 Beta 分布函数。 $\xi$  的概率密度<sup>[10]</sup>为:

$$p(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{B(m, 1-m)} \xi^{m-1} (1-\xi)^{(1-m)-1} & 0 < \xi < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$  是 Beta 函数。

假设  $\theta$  是一个随机变量, 在  $[0, 2\pi]$  服从均匀分布并和  $r_z, r_w, \xi$  相互独立。由此可知  $w = r_w e^{i\theta}$  是一个复高斯随机变量, 并且它的实部和虚部相互独立。将(3)式两边同时乘以  $e^{i\theta}$ , 得到  $r_z e^{i\theta} = \sqrt{\xi} w$ 。这个表达式说明  $z(t)$  可以表示为:

$$z(t) = \mu(t) w(t) \quad (5)$$

这就是所提出仿真模型, 复高斯过程  $w(t)$  可以通过文献[10]中提供的正弦求和方法获得,  $\mu(t)$  是平方根 Beta 函数, 可以通过高斯过程的非线性变换得到:

$$\mu(t) = F^{-1}(\Phi(y(t))) \quad (6)$$

$y(t)$  是具有自相关函数的零均值单位方差高斯过程,  $F(x)$  是带有参数  $m, 1-m$  的平方根 Beta 函数的累计分布函数,  $\Phi(x)$  是  $y(t)$  的累计分布函数。

### 1.1 基于近似逆累积分布函数仿真模型

基于近似逆累积分布函数的 Nakagami-m 衰落信道仿真主要思想是生成相量 Nakagami-m<sup>[7]</sup>。现有的瑞利衰落模拟器生成具有指定的自相关和相位特性的瑞利衰落包络样本序列, 随机变量  $R$  表示包络样本,  $\theta$  表示与  $R$  对应的相位样本, 通过

$$u = F_{Ray}(r) = 1 - e^{-r^2/2\sigma^2} \quad (7)$$

式中:  $\sigma^2$  是随机变量  $R$  的二阶矩(即  $\sigma^2 = E[R^2]$ ), 将  $R$  变成在  $[0, 1]$  均匀分布随机变量。这是由  $F_{Ray}(r)$  瑞利随机变量累积分布函数得到的。

已知, 通过逆 cdf 函数  $F^{-1}(u)$  改变一个均匀的随机变量, 导致变换的随机变量的 cdf 由  $F(x)$ <sup>[7]</sup> 给出, 从而:

$$A = F_R^{-1}(u) \quad (8)$$

是一个具有 Nakagami-m 分布的随机变量, 但是由于 Nakagami-m 逆累积分布函数没有闭合表达式, 文献[7]提供一个近似表达式:

$$G(\eta) = \eta + \frac{a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3}{1 + b_1 \eta + b_2 \eta^2} \quad (9)$$

式中:  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  是选择系数以最小化近似误差;  $G(u) \approx F_R^{-1}(u)$ ;  $\eta$  是一个辅助变量, 定义为:

$$\eta = \left( \sqrt{\ln \frac{1}{1-u}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (10)$$

虽然无法找到所有满足所有  $m$  值得精确近似系数, 但是给出了一部分  $m$  的系数值, 根据这些值可以通过内插方法确定其他的值的系数。

### 1.2 基于正弦函数求和仿真模型

Jakes 模型广泛适用于瑞利衰落信道仿真<sup>[11-12]</sup>, 但是 Jakes 模型是一个确定性模型, 可以在低频插入随机相位来克服其不是广义平稳各态遍历的缺陷<sup>[8]</sup>。

Nakagami-m 随机过程  $R$  与 Gamma 随机过程  $G$ , 通过公式  $G = R^2$  建立联系。实际上, Gamma 分布是一组独立同分布的中心卡方分布之和组成。同时中心卡方分布有  $U = \sum_{i=1}^n x_i^2$ , 这里  $x$  服从正态分布,  $x \sim (0, \sigma^2)$ , 因此中心卡方分布的概率密度函数和特征函数分别为:

$$P_U(u) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) (2\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} u^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right), u \geq 0 \quad (11)$$

$$\Psi_U(ju) = (1 - jv2\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \quad (12)$$

中心卡方随机变量  $U$  的均值是  $E[U] = n\sigma^2$ , 方差是  $\sigma^2 = 2n\sigma^2$ , 当  $n = 2m$  时, 化简式(11), 得到:

$$P_U(u) = \frac{1}{\Gamma(m) \left(\frac{U}{m}\right)^m} u^{m-1} \exp\left(-\frac{u}{U}\right), u \geq 0 \quad (13)$$

Gamma 随机变量概率密度函数为:

$$P_G(g) = \frac{1}{\Gamma(a)} g^{a-1} \exp\left(-\frac{g}{b}\right), g \geq 0 \quad (14)$$

$a > 0, b > 0$ , 它们分别是伽马分布的 2 个参数。比较式(13)和(14)发现, 如果满足  $a = m, b = \Omega/2$ , 伽马分布与自由度为  $2m$  的中心卡方分布的概率密度分布函数完全相同, 其平均值  $\bar{G} = \bar{U} = E[G] = 2m\sigma^2 = \Omega$ , 因此 Nakagami-m 分布的累积分布函数可以表示如下:

$$P_Z(z) = \frac{2}{\Gamma(m) \left(\frac{\Omega}{m}\right)^m} Z^{2m-1} \exp\left(-\frac{z^2}{n/m}\right), z \geq 0 \quad (15)$$

特征函数为:

$$\Psi_G(jv) = (1 - jv\Omega/m)^{-m} \quad (16)$$

与式(12)比较可得:

$$\Psi_G(jv) = \{\Psi_U(jv)\}^{2m/n} \quad (17)$$

当  $2m/n$  是整数时, 有

$$G = \sum_{j=1}^{2m/n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{k=1}^{2m} x_k^2 \quad (18)$$

式中:  $p = [2m]$  是  $2m$  的整数部分;  $\alpha, \beta$  分别是整数部分和

小数部分的调整参数, 并且有:

$$\alpha = \frac{2pm \pm \sqrt{2pm[(1+p)-2m]}}{p(1+p)} \quad (19)$$

$$\beta = 2m - \alpha p \quad (20)$$

最终得到 Nakagami-m 衰落信号表达式:

$$g_z(t) = \sqrt{G(t)} = \sqrt{\alpha \sum_{k=1}^p x_k^2(t) + \beta x_{p+1}^2(t)} = \sqrt{\alpha \sum_{k=1}^p x_{2I,k}^2(t) + \beta x_{2Q}^2(t)} \quad (21)$$

式中:  $g_{2I}(t)$ 、 $g_{2Q}(t)$  分别为改进后的 Jakes 模型的同相分量和正交分量。

## 2 不同仿真模型性能分析

根据上述分析, 通过 Matlab 仿真软件得到  $m = 0.65$  时, 3 种仿真模型的累积分布函数, 如图 1 所示。

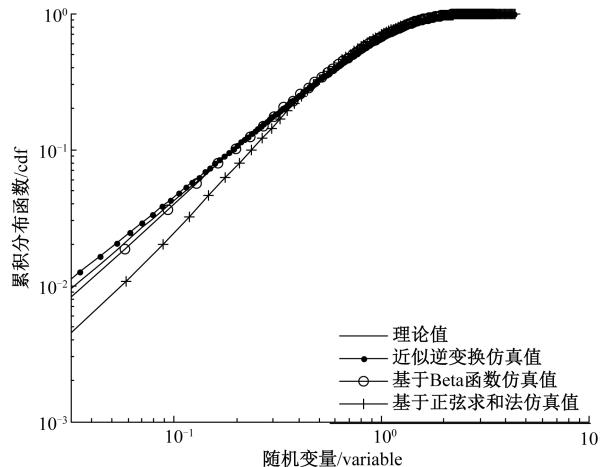


图 1 3 种方法累积分布函数仿真值

从图 1 中可以发现, 当  $m = 0.65$  时, 基于近似逆变换累积分布函数法仿真得到的累积分布函数效果最理想, 基于 Beta 函数仿真模型也比较理想, 而基于正弦求和法仿真模型存在一定误差。

由于正弦求和法仿真模型并没有考虑相位情况, 所以这里仅对基于近似逆变换仿真模型和基于 Beta 函数仿真模型的相位情况进讨论。2 种方法的相位累积分布函数如图 2 所示。

从图 2 中可以看出, 基于近似逆变换法仿真模型与基于 Beta 函数法仿真模型的相位累积分布函数仿真效果都比较理想, 基本与理论值重合, 服从在  $[0, 2\pi]$  上均匀分布。

仅仅通过累积分布函数和相位还不能完全比较出 3 种方法的性能优劣, 下面再对 3 种仿真模型所得的包络自相关函数进行仿真分析, 如图 3 所示。

从图 3 中可以发现, 基于近似逆累积函数法仿真得到的包络自相关函数基本上与理论值吻合, 基于 Beta 函数的仿真模型虽然存在一定误差, 但是总体趋势与理论值吻合,

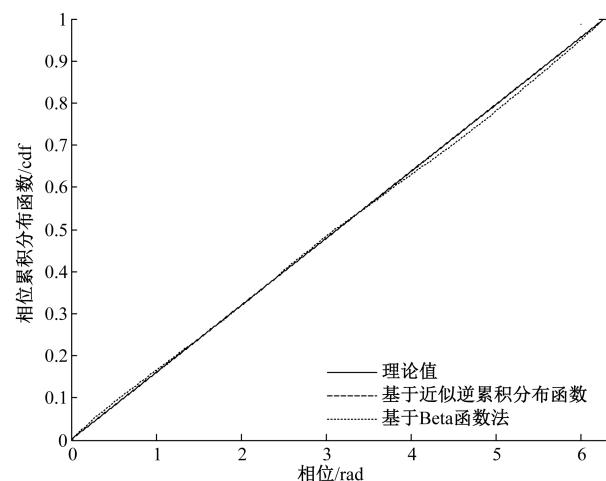


图 2 2 种方法相位累积分布函数

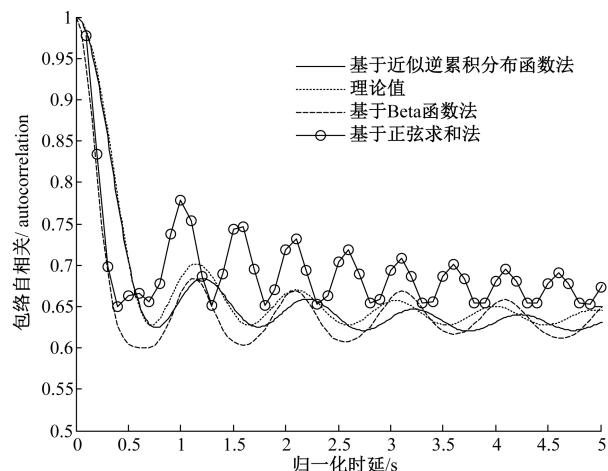


图 3 3 种方法包络自相关函数

而基于正弦求和法仿真模型则存在较大的误差, 这是因为基于正弦求和法仿真模型引入了 2 个调整参数<sup>[13]</sup>, 分别为模型的调整整数部分和小数部分, 从而导致了误差。但是从图 3 中可以看出, 随着时延的增加, 自相关曲线趋于平稳, 所得到的 Nakagami-m 随机序列具有平稳性, 且与理论相一致。

下面再从其他角度对 3 种仿真模型进行简单分析。1) 从适用范围看, 基于 Beta 函数仿真模型仅仅适用于  $0.5 < m < 1$ , 而基于近似逆累积分布函数法和基于正弦求和法仿真模型不仅适用于  $m < 1$  的情况, 对于  $m > 1$  的情况同样适用; 2) 从实现的难易程度看, 基于 Beta 函数仿真模型是通过正弦求和法生成 3 组不相关高斯随机变量, 并通过对其中 1 组高斯随机变量的非线性变换得到 Beta 函数的平方根函数, 基于正弦求和法利用改进的 Jakes 模型, 比较容易实现, 基于近似逆累积分布函数法只需要产生 2 个独立高斯变量就可以生成 Nakagami-m 随机变量, 也比较

容易实现;3)从运行效率看,基于正弦求和法仿真模型采用改进的 Jakes 模型,运行效率与  $m$  的取值有关,而基于 Beta 函数法仿真模型和近似逆累计分布函数法仿真模型的运行效率都与  $m$  的取值无关。

因此,在对 Nakagami- $m$  衰落信道建模时,就仿真结果看,基于近似逆变换累积分布函数法仿真模型最理想,并在无线衰落信道仿真中得到广泛应用<sup>[14]</sup>,基于 Beta 函数法仿真模型虽然有一定误差,但基本上和理论值相一致,而基于正弦求和法模型存在较大误差。此外,基于正弦函数求和法仿真模型在生成瑞利随机变量得到比较理想的仿真效果<sup>[15]</sup>,但是生成 Nakagami- $m$  随机变量时,效果不是很理想,并且没有考虑相位特性,而其他 2 种方法分析了相位性能,并获得比较理想的相位仿真结果。总体来看,对  $m$  在  $[0.5, 1]$  范围建立仿真模型时,基于逆累计分布函数法最好,其次是基于 Beta 函数法,基于正弦求和法效果最不理想。

### 3 结 论

在以往 Nakagami- $m$  衰落信道仿真模型的研究中,学者们更多地关注参数  $m > 1$  的情况,但是观测数据表明,研究参数  $m < 1$  的情况对无线通信技术的发展也有着重要的意义。本文分析了 3 种衰落信道仿真模型方法性能,并从仿真结果、适用范围、实现难易程度、运行效率等方面进行比较,得到了最理想的仿真模型,即基于近似逆累计分布函数法仿真方法,为日后的衰落信道建模提供了更完备的方法。但是本文没有提供基于正弦求和仿真方法的相位统计特性,希望日后能够在相位上做更对的研究,从而优化仿真模型。

### 参考文献

- [1] 韩晓晗. 无线信道特性分析[J]. 广播电视信息, 2009, (7): 76-78.
- [2] NAKAGAMI M. The  $m$ -distribution a general formula of intensity distribution of rapid fading[J]. In Statistical Methods of Radio Wave Propagation, Hoffman W C, Ed. Oxford, U.K.: Pergamon, 1960, 23(2): 3-36.
- [3] 王旭东, 岳殿武, 刘其中, 等. Nakagami- $m$  衰落信道下空时分组码的性能估计[J]. 电波科学学报, 2006, 21(5): 782-787.
- [4] 赵睿, 陈东华. Nakagami- $m$  信道下双向中继选择的中断概率分析[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2011, 35(4): 396-399.
- [5] 王雨榕, 徐友云, 王文力, 等. Nakagami- $m$  信道下全双工解码转发中继中断概率分析[J]. 信号处理, 2016,

32(3): 304-312.

- [6] YIP K. A simulation model for Nakagami- $m$  fading channels( $m < 1$ ) [J]. IEEE Trans Commun, 2000, 48(2): 214-221.
- [7] BEAULIEU N C. Efficient Nakagami- $m$  fading channel simulation [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2005, 54(2): 519-530.
- [8] WU T M, ZENG S Y. Sum-of-sinusoids-based simulator for Nakagami- $m$  fading channels [C]. Vehicular Technology Conference, 2003, 58 (1): 158-162.
- [9] JOHNSON N J, KOTZ S, BALAKRISHNAN N. Continuous univariate distributions [M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1995.
- [10] PATZOLD M, KILLAT U, LAUE F, et al. On the statistical properties of deterministic simulation models for mobile fading channels [J]. IEEE Trans. Veh. Technol, 1998, 47(22): 254-269.
- [11] 方坤, 何怡刚, 黄源, 等. 基于 K-S 检验的瑞利衰落信道统计特性评估[J]. 电子测量与仪器学报, 2018, 32(8): 36-41.
- [12] 曹海燕, 李君, 韦岗. 瑞利衰落信道下基于 LDPC 码的 USTM 的 MIMO 系统[J]. 电路与系统学报, 2007, 12(1): 147-152.
- [13] XIAO C, Zheng Y R, Beaulieu N C. Second-order statistical properties of the WSS Jakes' fading channel simulator [J]. IEEE Trans Commun, 2002, 50 (6): 888-891.
- [14] 周生奎, 戴秀超, 朱秋明, 等. 无线衰落信道模拟方法及仪器研制[J]. 电子测量与仪器学报, 2015, 29 (7): 988-994.
- [15] 李先锋, 景慕甜. 无线通信系统中瑞利衰落信道的性能研究[J]. 信息通信, 2018, (5): 9-10.

### 作者简介

- 吴猜, 研究生, 研究方向为无线通信技术, 无线衰落信道仿真技术。  
E-mail: 2570250922@qq.com
- 周涛, 研究生, 研究方向为无线通信技术。  
E-mail: 865608843@qq.com
- 李方华, 研究生, 研究方向为天线阵列设计。  
E-mail: 1726576549@qq.com
- 张燕华, 研究生, 研究方向为紧耦合 MIMO 研究。  
E-mail: 2863049377@qq.com