

基于采样约束的四旋翼指定时间自适应控制的研究^{*}

安泓宇 王亚国 赵晨阳 白宇

(1. 中北大学仪器与电子学院 太原 030051; 2. 极限环境光电动态测试技术与仪器国家重点实验室 太原 030051)

摘要: 提出了一种针对受采样约束影响的四旋翼指定时间自适应输出反馈控制方案。首先,基于不变流形原理,开发了一种高效的基于滤波器的未知系统动态估计器(USED)用于总体不确定性估计。其设计引入了可变阈值事件触发状态观测器,以替代实际的速度测量值,从而在低计算成本下保持估计准确性。其次,考虑到四旋翼对响应速度的严格要求,设计了指定时间漏斗控制(ATFC)方案,确保位移误差在预定时间内收敛,并约束误差边界,提升系统瞬态和稳态性能。最后,通过李雅普诺夫分析理论证明了闭环系统的稳定性,并通过仿真结果验证了所提方法的有效性和优越性。

关键词: 指定时间漏斗控制;未知系统动态估计器;采样约束;自适应跟踪控制;四旋翼

中图分类号: P318.63;TN96;U666.1 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.8099

Study on appointed-time adaptive control for quadrotor
based on sampling limitations

An Hongyu Wang Yaguo Zhao Chenyang Bai Yu

(1. School of Instrumentation and Electronics, North University of China, Taiyuan 030051, China; 2. National Key Laboratory for Extreme Environment Optoelectronic Dynamic Testing Technology and Instrumentation, Taiyuan 030051, China)

Abstract: This paper presents a designated-time adaptive output feedback control scheme for quadrotors affected by sampling constraints. First, based on the principle of invariant manifolds, an efficient filter-based unknown system dynamics estimator is developed for overall uncertainty estimation. The unknown system dynamics estimator (USDE) design introduces a variable-threshold event-triggered state observer to replace the actual velocity measurements, maintaining estimation accuracy at low computational cost. Secondly, considering the strict response speed requirements of the quadrotor, an appointed-time funnel control (ATFC) scheme is designed to ensure that displacement errors converge within the predetermined time and to constrain error boundaries, thereby enhancing the system's transient and steady-state performance. Finally, the stability of the closed-loop system is proven through Lyapunov analysis theory, and simulation results validate the effectiveness and superiority of the proposed method.

Keywords: appointed-time funnel control (ATFC); unknown system dynamics estimator (USDE); sampling constraints; adaptive tracking control; quadrotor

0 引言

近年来,四旋翼无人机^[1-3]作为一种高精度、低成本的自主飞行平台,受到了学术界和工业界的广泛关注。其在自动驾驶、无人机导航、消费电子和应急救援等领域的广泛应用,凸显了其在现代技术中的关键作用。然而,需要注意的是,在实际应用中,四旋翼的飞行精度往往受到外部干扰的显著影响,这在很大程度上限制了其在复杂环境中的任务执行能力和应用范围。

为了解决这一问题,学术界已开发出多种有效的抗干

扰控制方法。文献[4]提出了一种将滑模控制(sliding mode control, SMC)与比例-积分-微分控制(proportional-integral-derivative, PID)相结合的混合控制策略,用于补偿微机电系统(microelectromechanical system, MEMS)陀螺仪中的外部干扰。文献[5]介绍了一种自适应模糊超扭曲滑模控制策略,用以解决MEMS陀螺仪中外部干扰和模型不确定性的影响。通过利用模糊系统的通用逼近能力,所提方法动态估计了超扭曲滑模控制器的增益。为了解决复杂海洋环境对水面车辆的挑战,文献[6]采用基于神经网络的方法来估计系统的总不确定性,并利用反步法

推导控制律,从而增强了车辆导航性能的鲁棒性。值得注意的是,尽管基于函数逼近器的控制方法^[4,6]展现了出色的抗干扰能力和鲁棒性,但其固有的架构复杂性和大量的参数调节显著限制了其在四旋翼控制系统中的实际应用。与上述基于函数逼近器的方法^[4-6]相比,扩展状态观测器(extended state observer, ESO)^[7]展现了更低的计算复杂度和更少的参数调整等显著优势。文献[7]针对 MEMS 陀螺仪,研究采用 ESO 来估计系统的不确定性总和,该方法能够以较低的计算开销实现准确的不确定性识别,从而增强 MEMS 陀螺仪系统的抗干扰能力。同时,为了增强四旋翼的抗干扰能力,文献[8]采用了 ESO 来对外部扰动进行估计,并通过控制输入将扰动补偿。此外,李永福等^[9]提出了一种改进的扩展状态观测器,有效提升了四旋翼在复杂扰动下的轨迹跟踪精度;杨艳华等^[10]则将误差状态卡尔曼滤波与模型预测控制结合,实现了更高精度的轨迹跟踪。然而,ESO 方法的应用也存在一个关键的取舍困境,即需要在峰值现象和估计精度之间进行平衡。为了解决这一问题,文献[11]引入的未知系统动态估计器(unknown system dynamics estimator, USDE)通过基础滤波技术和不变流形构造来建立框架。该方法不仅保持了简单的结构,而且有效地减轻了峰值现象^[7-9]。将 USDE 技术与四旋翼路径跟踪控制系统结合,可以显著增强系统的抗干扰能力。此外,在设计和实现 USDE 时,必须特别考虑四旋翼的固有特性:在高速或者急转状态下速度状态的测量会极大的失真以及嵌入式系统固有的严格计算限制。

目前大多数抗干扰控制策略^[4,6]仅能实现系统的渐近稳定性,而无法精确调节关键的动态响应特性,如收敛速度和稳态误差边界。此外,这些控制方案的收敛时间与系统的初始误差和控制参数的选择高度相关,导致在不同操作条件下稳定化过程出现显著波动。特别是当系统存在较大初始误差时,稳定化过程明显延长,这会严重影响四旋翼的轨迹跟踪精度。为了解决这一问题,文献[11]创新性地提出了一种基于漏斗控制(funnel control, FC)的解决方案。该方法对误差转换进行约束,确保系统的调节过程完全独立于初始状态和控制参数的选择。FC 技术已成功应用于多个控制领域。文献[12]利用 FC 对四旋翼的轨迹跟踪误差进行约束,确保在飞行过程中严格跟踪预定轨迹。类似的性能约束思想在其他精密控制领域也有应用,苏鹏等^[13]在骨外固定机器人矫形中提出的基于阻抗控制的自适应跟踪方法,同样实现了对输出力的精确约束与跟踪。此外,相关研究还从观测器辅助漏斗动态面控制、自适应模糊神经滑模控制以及受约束非线性系统动态面控制等角度,进一步拓展了复杂非线性系统性能约束与鲁棒控制方法^[14-16]。然而,现有的 FC 方法^[12]通常在设计中采用指数性能函数,这意味着系统误差只能随着时间的推移收敛到预定的稳态区域。考虑到四旋翼在实际飞行中对响应速度的严格要

求,轨迹跟踪任务通常需要在预定时间内完成,因此迫切需要设计一种针对于四旋翼,可以预先指定收敛时间的 FC 方法。

本文提出了一种针对受采样约束影响的四旋翼的指定时间自适应输出反馈控制方案。采用 USDE 方法,基于不变流形理论和简单的滤波操作,无需复杂的激励条件即可准确估计总体不确定性。与 ESO 方法不同,后者在估计精度和峰值效应之间存在权衡,所提出的 USDE 有效规避了这一限制。对于四旋翼,测量噪声可能污染速度信息,导致无法直接用于 USDE。为此,本文采用状态观测器估计不可测量的速度状态,使得 USDE 能够高精度地估计总体不确定性。然而,这种方法不可避免地增加了控制系统的计算负担,这与四旋翼计算资源有限的特点相冲突。为了解决这一问题,本研究设计并将可变阈值事件触发机制集成到状态观测器中。该机制减少了传感器到控制器之间的信息采样频率,并将额外的计算负荷控制在可接受范围内。此设计不仅消除了由于状态测量不准确导致的估计误差,还通过事件触发采样显著降低了计算开销,同时保持了基于四旋翼的控制系统的抗干扰能力。

与现有抗干扰策略不同,本文提出的指定时间漏斗控制(appointed-time funnel control, ATFC)方法将系统的稳定化时间与初始误差和控制增益解耦,实现了对稳态和瞬态性能的精确调节。与传统的漏斗控制方法采用基于指数的性能函数不同,这些方法缺乏收敛时间的可调性,并且需要无穷的时间才能实现稳态误差,而所提出的 ATFC 方法用指定时间替代了指数函数,确保系统误差在规定时间内收敛到期望的稳态边界,并明确建立了收敛时间与控制参数之间的定量关系。

1 问题描述与四旋翼模型

为了分析和说明四旋翼的动力学,图 1 所示为四旋翼的结构,其中包括一个固定在机体上的坐标系 $\{B\}$ 和一个地球固定的惯性坐标系 $\{E\}$ 。如图 1 所示,由相应的螺旋桨旋转产生的推力 F_m ($m = 1, 2, 3, 4$) 可以控制四旋翼的位置和姿态。

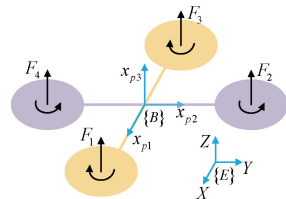


图 1 四旋翼示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the quadrotor

四旋翼的运动可以通过以下运动学和动力学公式来表示:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_v \\ \dot{\mathbf{x}}_v = f_v(\mathbf{v}) + F(\Phi, \mathbf{u}_F) + \mathbf{d}_v \\ \dot{\Phi} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = f_v(\mathbf{v}) + \mathbf{g}_v \mathbf{u} + \mathbf{d}_v \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}_p = [x_{p1}, x_{p2}, x_{p3}]$ 和 $\mathbf{x}_v = [x_{v1}, x_{v2}, x_{v3}]$ 分别表示四旋翼在 $\{E\}$ 坐标系中的位置和线速度。 $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]^T$ 与 $\varpi = [\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3]$ 分别表示四旋翼在 $\{B\}$ 坐标系中的姿态角和角速度。与参数不确定性相关的非线性函数则表示为 $f_v(\mathbf{v}) = -\mathbf{Y}_v \mathbf{v}/m$ 以及 $f_\varpi(\varpi) = -\mathbf{Y}_\varpi \varpi/J$ 。其中, $\mathbf{Y}_v = \text{diag}\{\mathbf{r}_{v1}, \mathbf{r}_{v2}, \mathbf{r}_{v3}\}$ 和 $\mathbf{Y}_\varpi = \text{diag}\{\mathbf{r}_{\varpi1}, \mathbf{r}_{\varpi2}, \mathbf{r}_{\varpi3}\}$ 被视为未知的阻尼矩阵, m 表示四旋翼的质量, $J = \text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ 是一个正的对角矩阵, J_1, J_2, J_3 是旋转惯性矩。平移子系统的虚拟控制输入可以通过 $F(\Phi, \mathbf{u}_F) = (\mathbf{K}\mathbf{u}_F - \mathbf{G})/m$ 得出, 其中, $\mathbf{K} = [\cos(\Phi_3)\sin(\Phi_2)\cos(\Phi_1) + \sin(\Phi_3)\sin(\Phi_1), \sin(\Phi_3)\sin(\Phi_2)\cos(\Phi_1) - \cos(\Phi_3)\sin(\Phi_1), \cos(\Phi_2)\cos(\Phi_1)]^T$ 用于实现从机体坐标系到惯性坐标系的转换, $\mathbf{G} = [0, 0, mg]^T$, 其中 g 为重力加速度常数。控制输入 $\mathbf{u}_F, \mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$ 被视为施加的推力和力矩。 $\mathbf{g}_\varpi = \text{diag}\{l/J_1, l/J_2, c/J_3\}$ 是一个对角常数矩阵, 其中 l, c 分别表示每个螺旋桨到四旋翼质心的距离和力矩因子。此外, 应注意, 存在以下控制输入与螺旋桨推力之间的等效关系, 由图 1 可见, $u_F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4, u_1 = F_2 - F_4, u_2 = F_3 - F_1, u_3 = F_1 - F_2 + F_3 - F_4$ 。其中, $\mathbf{d}_v = [d_{v1}, d_{v2}, d_{v3}]^T$ 和 $\mathbf{d}_\varpi = [d_{\varpi1}, d_{\varpi2}, d_{\varpi3}]^T$ 是未知但有界的环境扰动。

假设 1: 考虑参考信号 $x_{pi}^d(t)$, 其中 $i = 1, 2, 3$, 为足够光滑的函数, 这意味着 $x_{pi}^d(t), \dot{x}_{pi}^d(t)$ 和 $\ddot{x}_{pi}^d(t)$ 都是有界的。因此, 存在一个常数 $D_0 > 0$, 使得在紧集 Ξ_0 上满足以下条件:

$$[x_{pi}^d, \dot{x}_{pi}^d, \ddot{x}_{pi}^d]^T \in \Xi_0 = \{[x_{pi}^d, \dot{x}_{pi}^d, \ddot{x}_{pi}^d]^T : (x_{pi}^d)^2 + (\dot{x}_{pi}^d)^2 + (\ddot{x}_{pi}^d)^2 \leq D_0\} \subset \mathbf{R}^3 \quad (2)$$

2 控制器设计

2.1 未知系统动态估计器设计

假设 2^[17]: 总体不确定性 F 是有界的、可微的, 并且其时间导数满足 $|\dot{F}| < \bar{F}$, 其中 $\bar{F} \geq 0$ 是已知常数。

在四旋翼的飞行过程中, 测量噪声对速度信号 x_{vi} 的负面影响不可忽视, 因为噪声可能会损害 USDE 对总体不确定性估计的准确性。为了解决这个问题, 本文提出了一种可变阈值事件触发状态观测器用于速度估计, 从而为 USDE 提供可靠的数据输入。该状态观测器可以表示为:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{pi} = \hat{x}_{vi} + 2\omega_i(x_{pi}^* - \hat{x}_{pi}) \\ \dot{\hat{x}}_{vi} = \omega_i^2(x_{pi}^* - \hat{x}_{pi}) \end{cases} \quad (3)$$

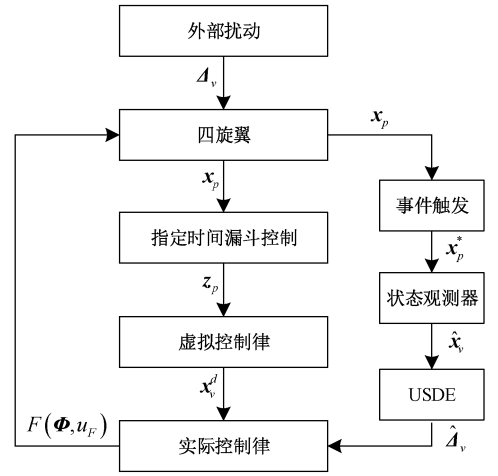


图 2 控制逻辑框图

Fig. 2 Block diagram of the control logic

触发事件定义为:

$$\begin{cases} x_{pi}^* = x_{pi}(t_n^p), \forall t \in (t_n^p, t_{n+1}^p), e_{pi}^* = x_{pi} - x_{pi}^* \\ t_{n+1}^p = \begin{cases} \inf\{t \in \mathbf{R} \mid |e_{pi}^*| \geq D_i |\tilde{x}_{pi}| + \omega_i^{-2} q_i\}, & |x_{pi}| < \wp_i \\ \inf\{t \in \mathbf{R} \mid |e_{pi}^*| \geq \omega_i^{-2} q_i\}, & |x_{pi}| \geq \wp_i \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

其中, 估计的位置和速度分别用 $\hat{x}_{pi}$ 和 $\hat{x}_{vi}$ 表示, 这些值是通过一个具有带宽参数 ω_i 和触发误差信号 e_{pi}^* 的观测器机制得到的。当满足式(4)中指定的事件条件时, 触发状态 x_{pi}^* 会进行离散更新, 更新为 $x_{pi}^*(t_{n+1}^p)$, 而在区间 $[t_n^p, t_{n+1}^p)$ 内, $x_{pi}^*(t_n^p)$ 保持不变。系统的触发行为由阈值参数 $\wp_i$ 控制, 其他设计参数包括更新系数 $D_i \in (0, 1]$ 和稳定性调节参数 q_i 。

假设 3^[18]: 存在正定函数 $V_i, W_i: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 和非负参数 $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}, \lambda_{i4}, b_{i1}, b_{i2}$, 使得:

$$\begin{cases} \lambda_{i1} \|\mathbf{x}_{ij}\|^2 \leq V_i(\mathbf{x}_{ij}) \leq \lambda_{i2} \|\mathbf{x}_{ij}\|^2 \\ \lambda_{i3} \|\mathbf{x}_{ij}\|^2 \leq W_i(\mathbf{x}_{ij}) \leq \lambda_{i4} \|\mathbf{x}_{ij}\|^2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_i(\mathbf{x}_{ij})}{\partial \mathbf{x}_{i1}} (\chi_{i1} - 2\chi_{i1}) - \frac{\partial V_i(\mathbf{x}_{ij})}{\partial \mathbf{x}_{i2}} \chi_{i1} \leq -W_i(\mathbf{x}_{ij}) \quad (6)$$

$$\left| \frac{\partial V_i(\mathbf{x}_{ij})}{\partial \mathbf{x}_{ij}} \right| \leq b_{ij} \|\mathbf{x}_{ij}\| \quad (7)$$

定理 1: 在假设 2~3 的条件下, 给定正的带宽 ω_i , 估计器式(3)的估计误差 $\tilde{x}_{pi}$ 和 $\tilde{x}_{vi}$ 是有界的且是收敛的, 满足:

$$\begin{cases} |\tilde{x}_{pi}| \leq \frac{K_i}{\omega_i^2} \\ |\tilde{x}_{vi}| \leq \frac{K_i}{\omega_i} \end{cases}, \forall t \geq \frac{4\lambda_{i2}\lambda_{i1}\ln\omega_i}{(\lambda_{i3}\lambda_{i1} - (2b_{i1} + b_{i2})D_i\lambda_{i2})\omega_i} \quad (8)$$

$$K_i = \left[\sqrt{\frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1}}} \sqrt{\tilde{x}_{pi}^2(0) + \tilde{x}_{vi}^2(0)} + \frac{((2b_{i1} + b_{i2})Q_i + b_{i2}\bar{\Delta}_i)\lambda_{i2}\sqrt{\lambda_{i1}}}{\lambda_{i1}\lambda_{i3} - (2b_{i1} + b_{i2})d_i\lambda_{i2}} \right] \quad (9)$$

证明:定义缩放误差为:

$$\begin{cases} \chi_{i1} = \tilde{x}_{pi} \left(\frac{t}{\omega_i} \right) \omega_i \\ \chi_{i2} = \tilde{x}_{vi} \left(\frac{t}{\omega_i} \right) \\ \chi_{i*} = e_{pi}^* \left(\frac{t}{\omega_i} \right) \omega_i \end{cases} \quad (10)$$

然后,可得:

$$\begin{cases} \frac{d\chi_{i1}}{dt} = \frac{d\tilde{x}_{pi} \left(\frac{t}{\omega_i} \right) \omega_i}{dt} = x_{vi} \left(\frac{t}{\omega_i} \right) - \hat{x}_{vi} \left(\frac{t}{\omega_i} \right) - \\ 2\omega_i (\chi_{i1} + \chi_{i*}) = \chi_{i2} - 2(\chi_{i1} + \chi_{i*}) \\ \frac{d\chi_{i2}}{dt} = \frac{d\tilde{x}_{vi} \left(\frac{t}{\omega_i} \right)}{dt} = \omega_i^{-1} \dot{\tilde{x}}_{vi} \left(\frac{t}{\omega_i} \right) - (\chi_{i1} + \chi_{i*}) \end{cases} \quad (11)$$

对 $V_i(\mathbf{x}_{ij})$ 求导得到:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(\mathbf{x}_{ij})}{dt} &= \frac{\partial V_i}{\partial \chi_{i1}} [\chi_{i2} - 2(\chi_{i1} + \chi_{i*})] + \\ &\frac{\partial V_i}{\partial \chi_{i2}} \left[\omega_i^{-1} \dot{\tilde{x}}_{vi} \left(\frac{t}{\omega_i} \right) - (\chi_{i1} + \chi_{i*}) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

回顾缩放误差式(10)和触发事件式(4),可得 $|\chi_{i*}| \leq \omega_i D_i \left| \tilde{x}_{pi} \left(\frac{t}{\omega_i} \right) \right| + \omega_i^{-1} q_i \leq D_i |\chi_{ij}| + \omega_i^{-1} q_i$, 从而得出以下公式:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(\mathbf{x}_{ij})}{dt} &= \frac{\partial V_i}{\partial \chi_{i1}} (\chi_{i2} - 2\chi_{i1}) - \frac{\partial V_i}{\partial \chi_{i2}} \chi_{i1} + \\ &\left(2 \frac{\partial V_i}{\partial \chi_{i1}} + \frac{\partial V_i}{\partial \chi_{i2}} \right) \chi_{i*} + \frac{\partial V_i}{\partial \chi_{i2}} \frac{\dot{\tilde{x}}_{vi} \left(\frac{t}{\omega_i} \right)}{\omega_i} \leq -W_i(\mathbf{x}_{ij}) + \\ &\left| \frac{\dot{\tilde{x}}_{vi} \left(\frac{t}{\omega_i} \right)}{\omega_i} \right| + \left(2 \left| \frac{\partial V_i}{\partial \chi_{i1}} \right| + \left| \frac{\partial V_i}{\partial \chi_{i2}} \right| \right) |\chi_{i*}| \leq -\lambda_{i3} \|\mathbf{x}_{ij}\|^2 + \\ &(2b_{i1} \|\mathbf{x}_{ij}\| + b_{i2} \|\mathbf{x}_{ij}\|) (D_i |\chi_{ij}| + \omega_i^{-1} q_i) \leq \\ &-\Phi_i V_i(\mathbf{x}_{ij}) + \omega_i^{-1} q_i (2b_{i1} + b_{i2}) \sqrt{V_i(\mathbf{x}_{ij})} \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\Phi_i = \frac{\lambda_{i3}}{2\lambda_{i2}} - \frac{(2b_{i1} + b_{i2})d_i}{2\lambda_{i1}}$.

随后,式(13)可以进一步重写为:

$$\begin{aligned} \frac{d\sqrt{V_i(\mathbf{x}_{ij})}}{dt} &\leq - \left(\frac{\lambda_{i3}}{2\lambda_{i2}} - \frac{(2b_{i1} + b_{i2})D_i}{2\lambda_{i1}} \right) \sqrt{V_i(\mathbf{x}_{ij})} + \\ &\frac{q_i(2b_{i1} + b_{i2}) + \bar{\Delta}b_{i2}}{2\omega_i \sqrt{\lambda_{i1}}} \end{aligned} \quad (14)$$

在假设3的帮助下,可以得到:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{ij}\| &\leq \sqrt{\frac{V_i(\mathbf{x}_{ij})}{\lambda_{i1}}} \leq \frac{\sqrt{\lambda_{i1} V_i(\mathbf{x}_{ij}(0))}}{\lambda_{i1}} e^{-\left(\frac{\lambda_{i3}}{2\lambda_{i2}} - \frac{(2b_{i1} + b_{i2})d_i}{2\lambda_{i1}} \right) t} + \\ &\frac{q_i(2b_{i1} + b_{i2}) + \bar{\Delta}b_{i2}}{2\omega_i \sqrt{\lambda_{i1}}} \int_0^t e^{-\left(\frac{\lambda_{i3}}{2\lambda_{i2}} - \frac{(2b_{i1} + b_{i2})D_i}{2\lambda_{i1}} \right) (t-s)} ds \end{aligned} \quad (15)$$

然后:

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_{pi}(t)| &= \left| \frac{\chi_{i1}(\omega_i t)}{\omega_i} \right| \leq \left\| \frac{\mathbf{x}_{ij}(\omega_i t)}{\omega_i} \right\| \leq \\ &\frac{1}{\omega_i} \left(\frac{\sqrt{\lambda_{i2} V_i(\mathbf{x}_{ij}(0))}}{\lambda_{i1}} e^{-\Phi_i \omega_i t} + \frac{\Xi_i}{\omega_i} \int_0^{\omega_i t} e^{-\Phi_i(\omega_i t-s)} ds \right) \leq \\ &\frac{1}{\omega_i} \left(\frac{\sqrt{\lambda_{i2} V_i(\mathbf{x}_{ij}(0))}}{\lambda_{i1}} e^{-\Phi_i \omega_i t} + \frac{\Xi_i}{\omega_i} \Psi_i (1 - e^{-\Phi_i \omega_i t}) \right) \leq \\ &\frac{1}{\omega_i} \left(\frac{\sqrt{\lambda_{i2} V_i(\mathbf{x}_{ij}(0))}}{\lambda_{i1}} e^{-\Phi_i \omega_i t} + \frac{\Xi_i}{\omega_i} \Psi_i \right) \\ |\tilde{x}_{vi}(t)| &= |\chi_{i2}(\omega_i t)| \leq \left\| \mathbf{x}_{ij}(\omega_i t) \right\| \leq \\ &\left(\frac{\sqrt{\lambda_{i2} V_i(\mathbf{x}_{ij}(0))}}{\lambda_{i1}} e^{-\Phi_i \omega_i t} + \frac{\Xi_i}{\omega_i} \int_0^{\omega_i t} e^{-\Phi_i(\omega_i t-s)} ds \right) \leq \\ &\left(\frac{\sqrt{\lambda_{i2} V_i(\mathbf{x}_{ij}(0))}}{\lambda_{i1}} e^{-\Phi_i \omega_i t} + \frac{\Xi_i}{\omega_i} \Psi_i (1 - e^{-\Phi_i \omega_i t}) \right) \leq \\ &\left(\frac{\sqrt{\lambda_{i2} V_i(\mathbf{x}_{ij}(0))}}{\lambda_{i1}} e^{-\Phi_i \omega_i t} + \frac{\Xi_i}{\omega_i} \Psi_i \right) \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\Xi_i = \frac{q_i(2b_{i1} + b_{i2}) + \bar{\Delta}b_{i2}}{2\sqrt{\lambda_{i1}}}$ 和 $\Psi_i =$

$$\begin{aligned} &\frac{2\lambda_{i1}\lambda_{i2}}{\lambda_{i1}\lambda_{i3} - (2b_{i1} + b_{i2})D_i\lambda_{i2}} \\ &\text{凭借假设3,式(16)可被简化为:} \\ &\frac{\sqrt{\lambda_{i2} V_i(\mathbf{x}_{ij}(0))}}{\lambda_{i1}} e^{-\Phi_i \omega_i t} \leq \sqrt{\frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1}}} \|\mathbf{x}_{ij}(0)\| e^{-\Phi_i \omega_i t} \leq \\ &\sqrt{\frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1}}} \sqrt{\tilde{x}_{pi}^2(0) + \tilde{x}_{vi}^2(0)} [\omega_i^2 e^{-\Phi_i \omega_i t}] \leq \\ &\frac{1}{\omega_i} \sqrt{\frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1}}} \sqrt{\tilde{x}_{pi}^2(0) + \tilde{x}_{vi}^2(0)}, \\ &t \geq \frac{4\lambda_{i1}\lambda_{i2} \ln \omega_i}{(\lambda_{i1}\lambda_{i3} - (2b_{i1} + b_{i2})D_i\lambda_{i2})\omega_i} \end{aligned} \quad (17)$$

式(16)可以进一步修改为:

$$\begin{cases} |\tilde{x}_{pi}| \leq \frac{K_i}{\omega_i^2}, \forall t \geq \frac{4\lambda_{i2}\lambda_{i1} \ln \omega_i}{(\lambda_{i3}\lambda_{i1} - (2b_{i1} + b_{i2})D_i\lambda_{i2})\omega_i} \\ |\tilde{x}_{vi}| \leq \frac{K_i}{\omega_i} \end{cases} \quad (18)$$

采用可变阈值事件触发机制的优势在于,它解决了固定阈值^[7]和相对阈值^[19-20]方法中估计精度与触发频率之间的固有矛盾。固定阈值触发对控制变化不敏感,导致低效的带宽利用;而相对阈值触发虽然减少了触发频率,但在处理大控制输入时会引入过多的触发误差,降低跟踪性能。本文提出的可变阈值机制动态切换于固定阈值和相对阈值之间,既保留了两种传统机制的优点,又克服了它们的局限性,实现了更优的跟踪精度和触发频率。

接下来,定义总体不确定性为 $\Delta_v = f_v(v) + d_v$ 。基于USDE设计原则^[21],引入滤波器来提取滤波后的变量 $\hat{x}_v^f$ 和 u_i^f :

$$\begin{cases} \kappa_i \dot{\hat{x}}_{vi}^f + \hat{x}_{vi}^f = \hat{x}_{vi}, \hat{x}_{vi}^f(0) = 0 \\ \kappa_i \dot{F}^f(\Phi, u_F) + F^f(\Phi, u_F) = F(\Phi, u_F) \\ F^f(\Phi, u_F)(0) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

其中, κ_i 是滤波常数。

通过构造辅助变量 ϵ_i , 建立一个显式的函数关系, 将估计状态 $\hat{x}_{vi}$ 、控制输入 u_i 和总体不确定性 Δ_{vi} 连接起来, 如式(20)所示。

$$\epsilon_i = (\hat{x}_{vi} - \hat{x}_{vi}^f) / \kappa_i - (F^f(\Phi, u_F) + \Delta_{vi}) \quad (20)$$

由于之前已经分析了估计偏差 $\tilde{x}_{vi}$ 的有界性, 可以有效推导出, 对于有界导数 $\dot{x}_{vi}$, 估计偏差的导数也具有上界, 即 $\sup_{t \geq 0} |\dot{\tilde{x}}_{vi}| \leq \mathfrak{I}_i$, 其中 $\mathfrak{I}_i > 0$ 。

定理 2: 所设计的变量 ϵ_i 是受限的, 并且能够指数收敛, 当条件 κ_i 满足时, 尤其是当 $\kappa_i \rightarrow 0$ 且 $\mathfrak{I}_i \rightarrow 0$ 时, 得到:

$$\lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} [(\hat{x}_{vi} - \hat{x}_{vi}^f) / \kappa_i - (F^f(\Phi, u_F) + \Delta_{vi})] = 0 \quad (21)$$

证明: ϵ_i 的时间导数可以如下得到:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_i &= (\dot{\hat{x}}_{vi} - \dot{\hat{x}}_{vi}^f) / \kappa_i - (\dot{F}^f(\Phi, u_F) + \dot{\Delta}_{vi}) = \\ &= \left[\dot{\hat{x}}_{vi} - \frac{1}{\kappa_i} (\hat{x}_{vi} - \hat{x}_{vi}^f) - (F(\Phi, u_F) - F^f(\Phi, u_F)) - \kappa_i \dot{\Delta}_{vi} \right] / \kappa_i = \\ &= (-\epsilon_i - \tilde{x}_{vi} - \kappa_i \dot{\Delta}_{vi}) / \kappa_i \end{aligned} \quad (22)$$

接下来, 可以选择一个 Lyapunov 函数 $V_{\epsilon_i} = \epsilon_i^2 / 2$, 其导数可以计算为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\epsilon_i} &= \epsilon_i \dot{\epsilon}_i = -\frac{1}{\kappa_i} \epsilon_i^2 - \frac{1}{\kappa_i} \epsilon_i \tilde{x}_{vi} - \epsilon_i \dot{\Delta}_{vi} \leq -\frac{1}{\kappa_i} \epsilon_i^2 + \\ |\epsilon_i| &\left(\frac{1}{\kappa_i} |\tilde{x}_{vi}| + |\dot{\Delta}_{vi}| \right) \end{aligned} \quad (23)$$

通过应用杨氏不等式, 可以得到:

$$|\epsilon_i| \left(\frac{1}{\kappa_i} |\tilde{x}_{vi}| + |\dot{\Delta}_{vi}| \right) \leq \frac{1}{2\kappa_i} \epsilon_i^2 + \frac{\kappa_i}{2} \left(\frac{1}{\kappa_i} \mathfrak{I}_i + \bar{\Delta}_{vi} \right)^2 \quad (24)$$

将上述结果代入式(23), 可以推导出 $\dot{V}_{\epsilon_i}$ 满足:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\epsilon_i} &\leq -\frac{1}{\kappa_i} \epsilon_i^2 + \frac{1}{2\kappa_i} \epsilon_i^2 + \frac{\kappa_i}{2} \left(\frac{1}{\kappa_i} \mathfrak{I}_i + \bar{\Delta}_{vi} \right)^2 = -\frac{1}{\kappa_i} V_{\epsilon_i} + \\ \frac{\kappa_i}{2} &\left(\frac{1}{\kappa_i} \mathfrak{I}_i + \bar{\Delta}_{vi} \right)^2 \end{aligned} \quad (25)$$

然后, 对式(25)积分, 可以得到:

$$V_{\epsilon_i} \leq V_{\epsilon_i}(0) e^{-t/\kappa_i} + \frac{\kappa_i^2}{2} \left(\frac{1}{\kappa_i} \mathfrak{I}_i + \bar{\Delta}_{vi} \right)^2 \quad (26)$$

因此, 可以进一步推导出:

$$|\epsilon_i(t)| \leq \sqrt{\epsilon_i^2(0) e^{-t/\kappa_i} + \kappa_i^2 \left(\frac{1}{\kappa_i} \mathfrak{I}_i + \bar{\Delta}_{vi} \right)^2} \quad (27)$$

这意味着 ϵ_i 是受限的, 并能够指数收敛到一个小的紧集。此外, 考虑到估计误差 $\tilde{x}_{vi}$ 的收敛性已经得到证明, 可以容易地得到, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\epsilon_i = 0$ 对于 κ_i 和 $\mathfrak{I}_i \rightarrow 0$ 成立。

因此, 基于上述讨论的不可变流形思想, 建立了一个有

效且简单的 USDE, 如式(28)所示。

$$\hat{\Delta}_{vi} = (\hat{x}_{vi} - \hat{x}_{vi}^f) / \kappa_i - F^f(\Phi, u_F) \quad (28)$$

定理 3: 对于结构化的 USDE 式(28)和状态观测器式(3), 不确定性的估计误差 $\tilde{\Delta}_{vi} = \Delta_{vi} - \hat{\Delta}_{vi}$ 可以保证指数收敛到一个紧集, 即 $|\tilde{\Delta}_{vi}(t)| \leq \sqrt{\tilde{\Delta}_{vi}^2(0) e^{-t/\kappa_i} + \kappa_i^2 \bar{\Delta}_{vi}^2 + \mathfrak{I}_i^2}$, 并且当且仅当 $\kappa_i, \mathfrak{I}_i \rightarrow 0$ 时, $|\tilde{\Delta}_{vi}(t)| \rightarrow 0$ 成立。

证明: 回顾式(3)和(28), 估计误差 $\tilde{F}_i$ 的导数可以推导为:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Delta}}_{vi} &= \dot{\Delta}_{vi} - \dot{\hat{\Delta}}_{vi} = \dot{\Delta}_{vi} - [(\dot{\hat{x}}_{vi} - \dot{\hat{x}}_{vi}^f) / \kappa_i - \dot{u}_i^f] = \\ \dot{\Delta}_{vi} &- [\dot{\hat{x}}_{vi} - (\dot{\hat{x}}_{vi} - \dot{\hat{x}}_{vi}^f) / \kappa_i + u_i^f - u_i] / \kappa_i = \dot{\Delta}_{vi} - \\ (\dot{\hat{x}}_{vi} - \dot{x}_{vi} + \Delta_{vi} - \hat{\Delta}_{vi} + u_i - u_i) / \kappa_i &= \dot{\Delta}_{vi} - (\tilde{\Delta}_{vi} - \dot{\hat{x}}_{vi}) / \kappa_i \end{aligned} \quad (29)$$

然后, 构造一个 Lyapunov 函数为 $V_{\tilde{\Delta}_{vi}} = \tilde{\Delta}_{vi}^2 / 2$, 其导数可以计算为:

$$\dot{V}_{\tilde{\Delta}_{vi}} = \tilde{\Delta}_{vi} \dot{\tilde{\Delta}}_{vi} = \tilde{\Delta}_{vi} \dot{\Delta}_{vi} - \tilde{\Delta}_{vi}^2 / \kappa_i + \tilde{\Delta}_{vi} \dot{\hat{x}}_{vi} / \kappa_i \quad (30)$$

通过应用 Young 不等式, 可以轻松推导出 $\tilde{\Delta}_{vi} \dot{\Delta}_{vi} \leq \frac{\tilde{\Delta}_{vi}^2}{4\kappa_i} + \kappa_i \dot{\Delta}_{vi}^2$ 和 $\tilde{\Delta}_{vi} \dot{\hat{x}}_{vi} \leq \frac{\tilde{\Delta}_{vi}^2}{4} + \dot{\hat{x}}_{vi}^2 \leq \frac{\tilde{\Delta}_{vi}^2}{4} + \mathfrak{I}_i^2$ 。将上述不等式代入式(30)中, 则可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\tilde{\Delta}_{vi}} &\leq -\tilde{\Delta}_{vi}^2 / \kappa_i + \tilde{\Delta}_{vi}^2 / (2\kappa_i) + \kappa_i \bar{\Delta}_{vi}^2 + \mathfrak{I}_i^2 / \kappa_i \leq \\ -V_{\tilde{\Delta}_{vi}} / \kappa_i &+ \kappa_i \bar{\Delta}_{vi}^2 + \mathfrak{I}_i^2 / \kappa_i \end{aligned} \quad (31)$$

应用类似式(23)~(27)的推导过程, 可以得到:

$$|\tilde{\Delta}_{vi}(t)| \leq \sqrt{\tilde{\Delta}_{vi}^2(0) e^{-t/\kappa_i} + \kappa_i^2 \bar{\Delta}_{vi}^2 + \mathfrak{I}_i^2} \quad (32)$$

容易得到, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $|\tilde{\Delta}_{vi}(t)| \rightarrow 0$ 对于 $\kappa_i, \mathfrak{I}_i \rightarrow 0$ 成立。

2.2 指定时间漏斗控制

定义 x_{pi}^d 为无量纲参考轨迹, 且对应的跟踪误差 e_{pi} 可以描述为:

$$e_{pi}(t) = x_{pi}(t) - x_{pi}^d(t) \quad (33)$$

为了通过预定义的行为函数评估系统的跟踪性能, 必须满足以下不等式:

$$-\varpi_i(t) < e_{pi}(t) < \varpi_i(t) \quad (34)$$

其中, $\varpi_i(t)$ 为指定时间性能函数, 表示为:

$$\varpi_i(t) = \begin{cases} (\varpi_{i0} - \varpi_{i\infty}) \rho(t) + \varpi_{i\infty}, & 0 \leq t < T_s \\ \varpi_{i\infty}, & t \geq T_s \end{cases} \quad (35)$$

其中, $\varpi_{i0}, \varpi_{i\infty}$ 为正参数, 且 $\rho(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) / 2\pi - \frac{t}{T_s}$ 。此外, $\varpi_{i0} = \varpi_i(0), \varpi_{i\infty} = \varpi_i(\infty)$ 。显然, ϖ_{i0} 可以限制瞬态超调, 而 $\varpi_{i\infty}$ 可以决定最大稳态跟踪误差。

定义 1: 函数 $\varpi_i(t): \{R^+, 0\} \rightarrow R^+$ 被称为指定时间性

能函数,当且仅当 $\varpi_i(t)$ 满足以下属性:1) $\varpi_i(t)$ 是一个非负且在 $t \in [0, T_s]$ 上单调递减的函数;2) $\varpi_i(t) = \varpi_{i\infty}$ 对于所有 $t \geq T_s$, 其中 T_s 是用户指定的到达时间, $\varpi_{i\infty}$ 是一个非负常数。

参考文献[22-23]可知,漏斗变量 $z_{pi} = \frac{e_{pi}}{(\varpi_i - |e_{pi}|)}$

在 $e_{pi}(t) = 0$ 的条件下无法保持可微性。这个特性违反了反步控制方法所需的基本可微性条件。

为解决传统漏斗变量公式固有的限制,本研究提出了一种改进的漏斗误差转换方案:

$$z_{pi} = \frac{e_{pi}}{\sqrt{\varpi_i^2 - e_{pi}^2}} \quad (36)$$

z_{pi} 的导数为:

$$\dot{z}_{pi} = M_i \left(\dot{e}_{pi} - \frac{\varpi_i}{\varpi_i} e_{pi} \right) \quad (37)$$

$$\text{其中, } M_i = \left(\frac{\varpi_i^2}{\sqrt{(\varpi_i^2 - e_{pi}^2)^3}} \right).$$

2.3 控制器设计

步骤1)回顾四旋翼的动力学方程式(1)并考虑之前定义的转换误差式(36), z_{pi} 的时间导数可以推导为:

$$\dot{z}_{pi} = M_i \left(x_{vi} - \dot{x}_{pi}^d - \frac{\varpi_i}{\varpi_i} e_{pi} \right) \quad (38)$$

随后,为了稳定误差动态式(38),设计一个虚拟控制律 x_{vi}^d 为:

$$x_{vi}^d = -k_{pi} M_i^{-1} e_{pi} + \dot{x}_{pi}^d + e_{pi} \frac{\varpi_i}{\varpi_i} e_{pi} \quad (39)$$

其中, k_{pi} 为控制增益。

为了简化反步框架中涉及的复杂解析推导,引入了一个一阶滤波器:

$$\mathbf{r}_i \dot{x}_{vi}^F + x_{vi}^F = x_{vi}^d, x_{vi}^F(0) = x_{vi}^d(0) \quad (40)$$

其中, $\mathbf{r}_i$ 是滤波器的时间延迟常数。

定义滤波误差 $e_{vi}^F = x_{vi}^F - x_{vi}^d$, 时间导数为:

$$\dot{e}_{vi}^F = \dot{x}_{vi}^F - \dot{x}_{vi}^d = -e_{vi}^F / \mathbf{r}_i - \dot{x}_{vi}^d \quad (41)$$

假设 x_{vi}^d 是一个连续且光滑的函数,满足 $|\dot{x}_{vi}^d| \leq B_i$, 其中 B_i 是一个正参数,那么可得到:

$$\dot{e}_{vi}^F \leq -e_{vi}^F / \mathbf{r}_i + B_i \quad (42)$$

构造一个 Lyapunov 函数候选函数 $V_{e_{vi}^F} = \frac{(e_{vi}^F)^2}{2}$, 其时间导数可以表示为:

$$\dot{V}_{e_{vi}^F} = e_{vi}^F \dot{e}_{vi}^F \leq -(e_{vi}^F)^2 / \mathbf{r}_i + B_i e_{vi}^F \quad (43)$$

基于杨氏不等式,以下不等式成立:

$$B_i e_{vi}^F \leq B_i^2 / 4 + (e_{vi}^F)^2 \quad (44)$$

将式(44)代入式(43), $\dot{V}_{e_{vi}^F}$ 可以重写为:

$$\dot{V}_{e_{vi}^F} \leq (-\mathbf{r}_i^{-1} - 1)(e_{vi}^F)^2 + B_i^2 / 4 \leq 2\bar{\mathbf{r}}_i V_{e_{vi}^F} + B_i^2 / 4 \quad (45)$$

其中, $\bar{\mathbf{r}}_i = (-\mathbf{r}_i^{-1} - 1)$ 。

通过类似式(23)~(27)的操作,可以得到:

$$|e_{vi}^F| \leq \sqrt{(\dot{e}_{vi}^F(0))^2 e^{\mathbf{r}_i t} + B_i^2 / 4 \mathbf{r}_i} \quad (46)$$

然后,根据式(40), $\tilde{x}_{vi}$ 和 e_{vi}^F , 式(38)可以表示为:

$$\dot{z}_{pi} = M_i [-k_{pi} M_i^{-1} z_{pi} + e_{vi} + \tilde{x}_{vi} + e_{vi}^F] \quad (47)$$

构造 Lyapunov 函数为 $V_{z_{pi}} = \frac{z_{pi}^2}{2}$, 可得到:

$$\dot{V}_{z_{pi}} = z_{pi} \dot{z}_{pi} = z_{pi} M_i (-k_{pi} M_i^{-1} z_{pi} + e_{vi} + \tilde{x}_{vi} + e_{vi}^F) = -k_{pi} z_{pi}^2 + M_i z_{pi} e_{vi} + M_i z_{pi} \tilde{x}_{vi} + M_i z_{pi} e_{vi}^F \quad (48)$$

使用杨氏不等式,可得到 $z_{pi} e_{vi} \leq z_{pi}^2 + \frac{e_{vi}^2}{4}$, $z_{pi} \tilde{x}_{vi} \leq z_{pi}^2 + \frac{\tilde{x}_{vi}^2}{4}$, $z_{pi} e_{vi}^F \leq z_{pi}^2 + \frac{(e_{vi}^F)^2}{4}$ 。将上述不等式代入式(48)中,能够得到:

$$\dot{V}_{z_{pi}} \leq (3 - k_{pi}) z_{pi}^2 + M_i e_{vi}^2 / 4 + M_i \tilde{x}_{vi}^2 / 4 + M_i (e_{vi}^F)^2 / 4 \quad (49)$$

步骤2)速度跟踪误差 $e_{vi} = \hat{x}_{vi} - x_{vi}^F$ 的时间导数为:

$$\dot{e}_{vi} = \dot{\hat{x}}_{vi} - \dot{x}_{vi}^F \quad (50)$$

回顾速度子系统的动力学方程式(1),式(50)可以进一步推导为以下形式:

$$\dot{e}_{vi} = F_i(\Phi, u_F) + \Delta_i - \tilde{x}_{vi} - \dot{x}_{vi}^F \quad (51)$$

然后,选择 Lyapunov 函数 $V_{e_{vi}} = \frac{e_{vi}^2}{2}$, 并基于式(51)和

(43),对其时间导数进行求解得到:

$$\dot{V}_{e_{vi}} = e_{vi} \dot{e}_{vi} = e_{vi} (F_i(\Phi, u_F) + \Delta_i - \tilde{x}_{vi} - \dot{x}_{vi}^F) \quad (52)$$

实际控制律就可定义为:

$$F_i(\Phi, u_F) = -k_{vi} e_{vi} - \dot{\Delta}_i + \dot{x}_{vi}^F \quad (53)$$

其中, k_{vi} 是速度子系统的控制增益。

将式(53)代入式(52), $\dot{V}_{e_{vi}}$ 可以重新写成:

$$\dot{V}_{e_{vi}} = e_{vi} (-k_{vi} e_{vi} - \dot{\Delta}_i + \dot{x}_{vi}^F + \Delta_i - \tilde{x}_{vi} - \dot{x}_{vi}^F) = e_{vi} (-k_{vi} e_{vi} - \tilde{x}_{vi} + \tilde{\Delta}_{vi}) \quad (54)$$

再次使用杨氏不等式,并将结果代入式(54), $\dot{V}_{e_{vi}}$ 可以重新写成以下形式:

$$\dot{V}_{e_{vi}} \leq -(k_{vi} - 2)e_{vi}^2 + \tilde{\Delta}_{vi}^2 / 2 + \tilde{x}_{vi}^2 / 2 \leq -(k_{vi} - 3/2)e_{vi}^2 + \tilde{\Delta}_{vi}^2 / 2 + \tilde{x}_{vi}^2 / 2 \quad (55)$$

定理4:考虑四旋翼模型式(1)、状态观测器式(3)、USDE式(28)、虚拟控制律式(39)、一阶滤波器式(41)和实际控制律式(53),这些可以确保位置跟踪任务的完成以及整个系统状态的有界性。

证明:定义 Lyapunov 函数候选函数为 $V_i = V_{z_{pi}} + V_{e_{vi}}$, 其时间导数为:

$$\dot{V}_i = e_{vi} (-k_{vi} e_{vi} - \tilde{x}_{vi} + \tilde{\Delta}_{vi}) + z_{pi} M_i (-k_{pi} M_i^{-1} z_{pi} + e_{vi} + \tilde{x}_{vi} + e_{vi}^F) = -k_{vi} e_{vi}^2 - e_{vi} \tilde{x}_{vi} + e_{vi} \tilde{\Delta}_{vi} - k_{pi} z_{pi}^2 + M_i z_{pi} e_{vi} + M_i z_{pi} \tilde{x}_{vi} + M_i z_{pi} e_{vi}^F \quad (56)$$

然后,结合 ATFC 的特性和假设2,可以推导出 M_i 在紧集内,即 $M_i \leq \bar{M}_i$, 其中 $\bar{M}_i$ 是非负值。将式(48)和(55)

代入式(56)中, $\dot{V}_i$ 可以重新写成以下形式:

$$\dot{V}_i \leqslant -\bar{k}_{vi} e_{vi}^2 - \bar{k}_{pi} z_{pi}^2 + |\tilde{\Delta}_{vi}|^2/2 + \mathfrak{F}_i^2/2 + |\tilde{x}_{vi}|^2/2 + |e_{vi}^F|^2/2 \quad (57)$$

其中, $\bar{k}_{vi} = k_{vi} - 2$, $\bar{k}_{pi} = k_{pi} - \frac{3M_i}{2}$ 。然后, 定义 $\mu_i = \min\{\bar{k}_{vi}, \bar{k}_{pi}\}$, 可以得到:

$$\dot{V}_i \leqslant -2\mu_i V_i + |\tilde{\Delta}_{vi}|^2/2 + \mathfrak{F}_i^2/2 + |\tilde{x}_{vi}|^2/2 + |e_{vi}^F|^2/2 \quad (58)$$

类似地, 可以进一步推导出:

$$V_i = \begin{bmatrix} z_{pi} \\ e_{vi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{pi} \\ e_{vi} \end{bmatrix} \leqslant V_i(0) e^{-2\mu_i t} + (\mathfrak{F}_i^2 + |\tilde{\Delta}_{vi}|^2 + |\tilde{x}_{vi}|^2 + |e_{vi}^F|^2)/4\mu_i \quad (59)$$

此外, 式(59)中的项 $|\tilde{F}_i|^2$ 、 $|\tilde{x}_{vi}|^2$ 和 $|e_{vi}^F|^2$ 的有界性分别由式(32)、(18)和(46)保证。因此, Lyapunov 函数 V_i 在 $t \geqslant 0$ 上是均匀有界的, 从而验证了定理 4 中所述的闭环稳定性。

3 仿真结果

为了评估所针对四旋翼所提出控制算法的性能, 使用 MATLAB/Simulink 进行数值仿真。四旋翼的参数配置如下: 质量 $m = 2$ kg, 重力加速度 $g = 9.8$ m/s², 阻力系数 $c = 0.05$, 臂长 $l = 0.4$ m, 惯性矩阵 $\mathbf{J} = [0.16, 0.16, 0.32]^T$ kg·m²。闭环动力学的初始条件设置为 $x_{p1}(0) = 4$ m, $x_{p2}(0) = -2$ m, $x_{p3}(0) = -1$ m, 且初始角度为 $\Phi_1 = \Phi_2 = 0^\circ$, $\Phi_3 = 0.2^\circ$ 。阻尼矩阵设计为 $\xi_v = \text{diag}\{0.01, 0.01, 0.01\}$ N·ms², $\xi_\omega = \text{diag}\{0.012, 0.012, 0.012\}$ N·ms²。速度扰动为 $\mathbf{d}_v = [2(\sin(t) + \sin(0.5t) - \cos(0.8t)), 2(\cos(t) + \sin(0.5t) - \cos(0.8t)), 2\sin(1.5t)]^T$ 。期望的参考轨迹定义为:

$$x_p^d = \begin{cases} [0, 0, 9(1 - e^{-0.3t})]^T, & t \leqslant 9 \\ [10(1 - \cos(2\pi(t - 9)/23)), \\ 5\sin(4\pi(t - 9)/23), 9(1 - e^{-0.3t})]^T, & t > 9 \end{cases}$$

案例 1: 验证了所提出的控制方法在实现理想跟踪性能方面的有效性, 进行了仿真并展示了相关结果, 如图 3~7 所示。为验证所提控制器的轨迹跟踪性能, 进行了 8 字形轨迹跟踪仿真, 结果如图 3 所示, 实现了在非零初始跟踪误差的情况下完美跟踪。图 4 所示为轨迹跟踪误差的收敛过程, 可以直观地看到四旋翼的瞬态和稳态性能可以严格满足规定的规格, 同时所有的规定边界都在指定时间内收敛到预定的稳态值。从图 5 和 6 可以看出, 位置和姿态响应能够平滑地跟随参考信号, 无论外部干扰和未知系统动态是否存在。图 7 所示为通过 USDE 观测器, 能够精确估计出集中干扰。

案例 2(与有限时间控制^[24]的比较): 本案例研究主要用于展示所提出的 ATFC 方法在指定时间稳定性方面, 相较于文献[24]的有限时间控制方案具有更优的收敛特性。

表 1 所提控制算法的参数

选项	参数
ATFC	$T = 5, \varpi_{10} = 1.1, \varpi_{i\infty} = 0.15, T_s = 0.2, \varpi_{20} = 1.1, \varpi_{2\infty} = 0.15$
变阈值事件触发状态观测器	$\zeta_1 = 0.5, \zeta_2 = 0.2, d_1 = d_2 = 0.01, Q_1 = Q_2 = 0.05, w_1 = w_2 = 20$
USDE	$\kappa_1 = \kappa_2 = 0.04$
控制器	$k_{p1} = 30, k_{p2} = 24, k_{v1} = 25, k_{v2} = 24$

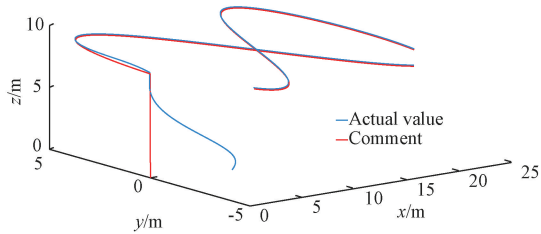


图 3 8 字形轨迹跟踪结果

Fig. 3 Lemniscate trajectory tracking results

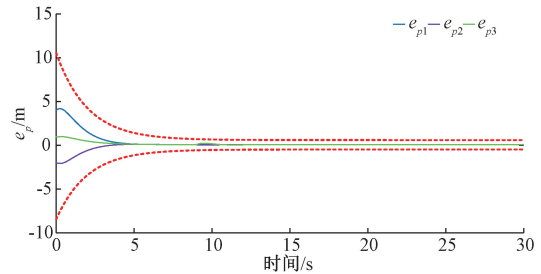


图 4 轨迹跟踪误差的收敛性能

Fig. 4 Convergence performance of trajectory tracking errors

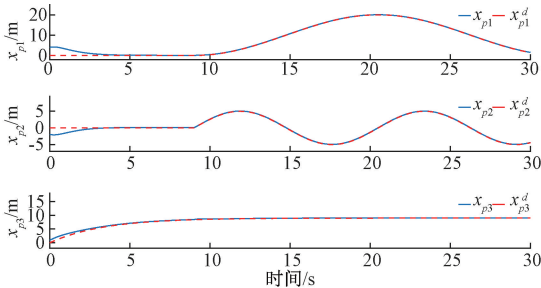


图 5 位置响应曲线

Fig. 5 Position response curves

为了确保公平的比较分析, 所有算法参数均经过精心优化, 以实现最佳性能。将指定时间设置为 1 s。如图 8(a)所示, 有限时间控制下的跟踪误差的收敛行为显著依赖于初始条件。经验观察表明, 收敛时长与初始误差大小之间存在直接相关性。即较大的初始偏差通常导致更长的稳定时间。

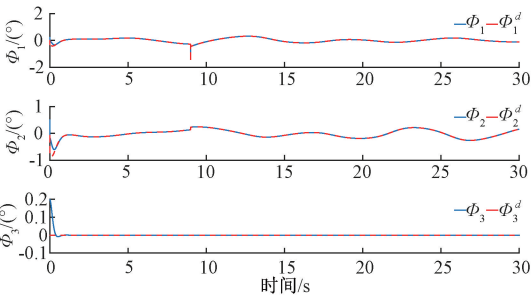


图 6 姿态响应曲线

Fig. 6 Attitude response curves

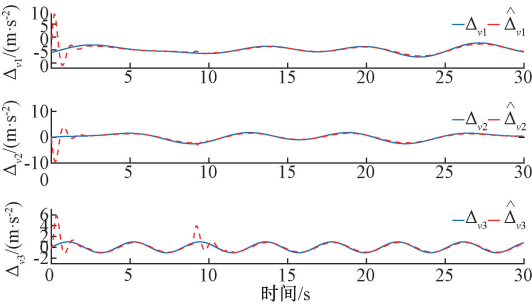


图 7 平动环集总扰动的估计

Fig. 7 Estimation of translational ring aggregate disturbance

这种延迟收敛可能在具有严格时间约束的四旋翼应用中显得不够充分,可能需要修改控制律以满足指定的收敛时限。相比之下,图 8(b)确认了 ATFC 方法在不论初始误差变化或控制奇异性情况下,均能保证指定时间收敛。值得注意的是,这一时间保证是在不妥协跟踪精度的前提下实现的。这些结果共同表明,ATFC 策略提供了一个强大的控制框架,既确保了时间收敛保证,又在各种初始条件和奇异性情景下实现了高精度跟踪性能。

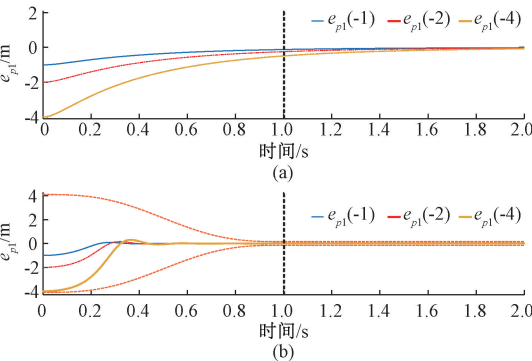


图 8 ATFC 与有限时间控制策略^[24]对比

Fig. 8 Comparison of ATFC and finite-time control strategy^[24]

案例 3(与函数逼近器^[6]和 ESO^[7]的比较):本研究通过全面的比较分析,验证了 USDE 相较于传统函数逼近器^[6]和 ESO^[7]的优越性能。所有测试中的运动学结构和参数保持一致,而估计器参数和动力学配置则经过精心调节,以确保公正比较。如图 9 所示,不同估计器对扰动的估计

性能揭示了 USDE 方法的明显优势。定量分析表明,与其他方法相比,USDE 在收敛速率和精度上均表现出最佳的估计性能。由图 9 和表 2 可以看出,USDE 优于其他估计器,表现为更快的收敛时间和更高的估计精度。尽管 ESO 表现出竞争力的估计能力,但其实际应用受到初始操作期间显著瞬态超调的影响。这种现象通常需要在估计精度和响应速度之间做出妥协,以实现可接受的性能。相比之下,传统的函数逼近器在收敛速度和估计精度方面都表现不足。

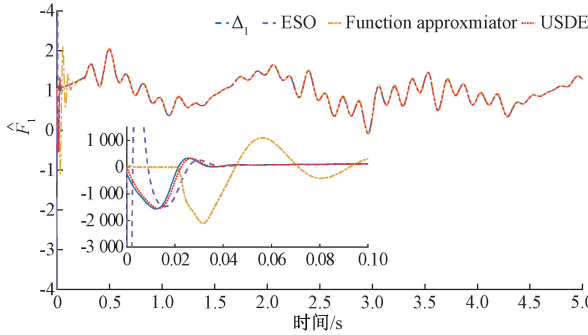


图 9 不同估计器的估计性能对比

Fig. 9 Comparison of estimation performance of different estimators

表 2 不同扰动抑制方法的性能比较

Table 2 Performance comparison of different disturbance rejection methods

估计方法	稳态跟踪精度	稳定时间/s
函数逼近器 ^[6]	0.161	3.012
ESO ^[7]	0.053	0.505
USDE	0.038	0.421

案例 4(可变阈值触发优于固定阈值^[11]和相对阈值^[20]触发的验证):为了验证所提出的可变阈值事件触发机制在估计精度和采样频率之间达到的令人满意的平衡,进行了与固定阈值^[11]和相对阈值^[20]方法的比较研究,所有仿真条件下的采样频率为 1 kHz。如图 10 和表 3 所示,相对阈值方法通过降低采样频率来提高效率,但以牺牲估计精度为

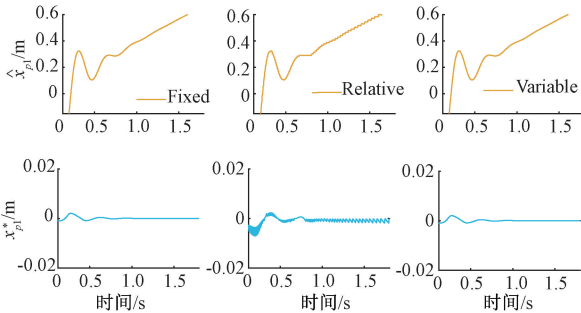


图 10 不同触发机制的性能对比

Fig. 10 Comparison of the performance of different trigger mechanisms

表 3 不同触发机制的比较分析

Table 3 Comparative analysis of different trigger mechanisms

阈值策略	采样时间	跟踪精度(方差)
固定阈值 ^[11]	4 340	0.009 1
相对阈值 ^[20]	1 908	0.034 5
变阈值	2 559	0.010 3

代价,而固定阈值方法则保持了较高的估计精度,但在减少采样频率方面表现不佳。相比之下,所提出的可变阈值触发策略根据系统状态动态调整其触发条件,在估计精度和采样效率指标上始终表现出令人满意的性能。

4 结 论

本研究提出了一种适用于受采样约束的四旋翼的指定时间自适应输出反馈控制方法。首先,考虑到四旋翼中速度状态的固有的不可测性和计算资源的限制,通过将USDE与可变阈值事件触发状态观测器相结合,构建了一个具有高精度和低计算负担的总体不确定性估计架构。同时,为了应对四旋翼测量中对响应速度的严格要求,提出了一种ATFC方法,该方法能够预先调整跟踪误差,并保证指定时间内收敛,从而增强控制系统的瞬态和稳态性能。

参考文献

[1] 祁瑞敏,张国栋. 基于预定义时间的四旋翼无人机轨迹跟踪控制[J]. 电子测量技术, 2025, 48(3):18-25.
QI R M, ZHANG G D. Predefined-time trajectory tracking control for quadrotor UAVs[J]. Electronic Measurement Technology, 2025, 48(3): 18-25.

[2] 马澳华,邢关生. 基于GRU-A3C的四旋翼无人机视觉避障系统[J]. 电子测量技术, 2024, 47(21):46-52.
MA AO H, XING G SH. A visual obstacle avoidance system for quadrotor UAVs based on GRU-A3C[J]. Electronic Measurement Technology, 2024, 47(21): 46-52.

[3] 有德义,郝永平,羊进,等. 共轴折叠双旋翼无人机姿态测量实验与分析[J]. 电子测量技术, 2022, 45(21): 136-141.
YOU D Y, HAO Y P, YANG J, et al. Experimental measurement and analysis of attitude of co-axial folding dual-rotor UAV[J]. Electronic Measurement Technology, 2022, 45(21): 136-141.

[4] RAHMANI M, REDKAR S. Fractional robust data-driven control of nonlinear MEMS gyroscope [J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111: 19901-19910.

[5] FEI J T, FENG ZH L. Adaptive fuzzy super-twisting sliding mode control for microgyroscope[J]. Complexity, 2019, 2019(1): 6942642.

[6] HU X, GONG Q T, LI K Q. Event-triggered adaptive disturbance rejection for marine surface vehicles with unknown dynamics and disturbances [J]. Ocean Engineering, 2023, 268: 113379.

[7] SHAN Y H, BAI Y, YANG S T, et al. Adaptive appointed-time control for microelectromechanical system gyroscopes with uncertainties and limited sampling[J]. Measurement, 2025, 246: 116547.

[8] LU S, TSAKALIS K, CHEN Y. High-order fully actuated system approach for quadrotor control based on extended state observers[J]. International Journal of Systems Science, 2025, 56(13): 3194-3215.

[9] 李永福,文跃洲,黄龙旺. 基于改进扩展状态观测器的四旋翼无人机轨迹鲁棒跟踪控制[J]. 仪器仪表学报, 2023, 44(4): 129-139.
LI Y F, WEN Y ZH, HUANG L W. Robust trajectory tracking control of quadrotor UAV based on improved extended state observer[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2023, 44(4): 129-139.

[10] 杨艳华,吕童,柴利. 基于ESKF-MPC的四旋翼无人机轨迹跟踪控制[J]. 电子测量与仪器学报, 2022, 36(7):24-32.
YANG Y H, LYU T, CHAI L. Trajectory tracking control of quadrotor UAV based on ESKF-MPC[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2022, 36(7): 24-32.

[11] ZHANG J T, SHENG L, ZHOU D H. Path-guided formation-containment control for networked heterogeneous multi-vehicle systems [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2024, 25(11): 18292-18304.

[12] HACKL C M, HOPFE N, ILCHMANN A, et al. Funnel control for systems with relative degree two[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2013, 51(2): 965-995.

[13] 苏鹏,谢实辉,刘霖,等. 基于阻抗控制的骨外固定机器人矫形力自适应跟踪[J]. 仪器仪表学报, 2023, 44(11): 99-108.
SU P, XIE SH H, LIU L, et al. Adaptive tracking of orthopedic force for external bone fixation robot based on impedance control[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2023, 44(11): 99-108.

[14] LIU X, TONG D B, CHEN Q Y, et al. Observer-based adaptive funnel dynamic surface control for nonlinear systems with unknown control coefficients and hysteresis input[J]. Neural Processing Letters, 2022, 54: 4681-4710.

[15] XIE J P, FEI J T. Adaptive fuzzy neural super-

twisting control of micro gyroscope sensor [J]. Scientific Reports, 2024, 14: 26192.

[16] XIA X N, ZHANG T P. Robust adaptive quantized DSC of uncertain pure-feedback nonlinear systems with time-varying output and state constraints [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(10): 3357-3375.

[17] SHAO X L, ZHANG J T, ZHANG W D, et al. Robust path-following control for multiple autonomous vehicles along an implicit elliptical curve[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2023, 53(11): 6778-6791.

[18] SHI D W, XUE J, WANG J Z, et al. A high-gain approach to event-triggered control with applications to motor systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(8): 6281-6291.

[19] GUO B Z, WU Z H, ZHOU H C. Active disturbance rejection control approach to output-feedback stabilization of a class of uncertain nonlinear systems subject to stochastic disturbance [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(6): 1613-1618.

[20] XU X Y, WANG H, LI W Q, et al. Distributed output tracking via event-triggered control for nonlinear multi-agent systems[J]. Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences, 2022, 34(10): 9173-9183.

[21] HUANG Y B, WU J D, NA J, et al. Unknown system dynamics estimator for active vehicle suspension control systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(8): 8504-8514.

[22] HAN S I, LEE J M. Fuzzy echo state neural networks and funnel dynamic surface control for prescribed performance of a nonlinear dynamic system[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61(2): 1099-1112.

[23] SI H N, SHAO X L, ZHANG W D. MLP-based neural guaranteed performance control for MEMS gyroscope with logarithmic quantizer [J]. IEEE Access, 2020, 8: 38596-38605.

[24] MIN X, BALDI S, YU W W. Finite-time distributed control of nonlinear multiagent systems via funnel technique[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2023, 53(2): 1256-1267.

作者简介

安泓宇(通信作者), 硕士研究生, 主要研究方向为无人载体的控制与自主导航。
E-mail:18835081959@163.com

王亚国, 博士研究生, 主要研究方向为面向极限环境的智能融合导航技术。
E-mail:wangyaguo0723@163.com

赵晨阳, 硕士研究生, 主要研究方向为微弱信号处理及组合导航。
E-mail:leileichenyang@126.com

白宇, 硕士研究生, 主要研究方向为智能抗干扰估计与融合技术。
E-mail:baiyu19981122@126.com