

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2209725

# 基于改进 WOA 的鲁棒增广扩展 Kalman 滤波器设计\*

李科信 梁天添 郑祥

(大连交通大学自动化与电气工程学院 大连 116028)

**摘要:** 本文针对一类非线性系统,提出基于广义系统的鲁棒增广扩展 Kalman 滤波器,结合改进鲸群优化算法寻优系统噪声,以精确估计系统状态量以及并发执行器和传感器故障。首先,视故障为系统的状态变量,建立广义系统,将非线性系统的故障估计转化为非线性广义系统的状态估计。其次,提出鲁棒上界以降低线性化误差对估计精度的影响。然后,利用改进鲸群算法寻优系统噪声,以优化鲁棒增广扩展 Kalman 滤波器。最后,给出 F-16 飞机的纵向运动数值模型,使用本文方法与自适应无迹 Kalman 滤波器以及基于鲸群算法的鲁棒增广扩展 Kalman 滤波器进行对比仿真,仿真结果表明,相较于其他两种算法,本文方法的故障估计均方根误差降低了 50% 左右,验证了其优越性。

**关键词:** 改进鲸群优化算法;鲁棒;Kalman 滤波;并发故障;广义系统

**中图分类号:** TN713 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.1050

## Design of robust augmented extended Kalman filter based on IWOA

Li Kexin Liang Tiantian Zheng Xiang

(School of Automation and Electrical Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China)

**Abstract:** In this paper, for a class of nonlinear systems, a robust augmented extended Kalman filter is proposed based on descriptor systems combined with the improve whale optimization algorithm to search the system noise optimal solution, so that the accurate estimation of concurrent actuator and sensor faults for the nonlinear system is implemented. Firstly, the concurrent faults are regarded as the state variable of the nonlinear system, a descriptor systems is established, and the fault estimation of the nonlinear system is transformed into the state estimation of the nonlinear descriptor systems. Then, a robust upper bound is proposed to decrease the influence of linearization error on estimation accuracy. Furthermore, the noise is optimized by the improve whale optimization algorithm to optimize the robust augmented extended Kalman filter. Finally, the longitudinal motion simulation model of F-16 aircraft is given, the algorithm designed in this paper is used to compare with adaptive unscented Kalman filter and robust augmented extended Kalman filter based on whale optimization algorithm. The simulation results show that compared with the other two algorithms, the root mean square error of fault estimation of the algorithm designed in this paper is reduced by about 50%, which verifies its superiority.

**Keywords:** IWOA; robust; KF; concurrent fault; descriptor systems

## 0 引言

近年来,为提高控制系统的可靠性与稳定性,国内外学者在故障诊断领域进行了大量的研究,其中,基于模型的研究方法得到了深入研究,已有学者提出了神经网络<sup>[1]</sup>,深度宽卷积 Q 网络<sup>[2]</sup>,SincNet 网络<sup>[3]</sup>等智能算法。众所周知,对于具有噪声的非线性离散系统,扩展 Kalman 滤波器(extended Kalman filter, EKF)具有良好的估计性能<sup>[4]</sup>,而为了进一步降低因系统线性化导致的误差对滤波估计精度

的影响,鲁棒算法<sup>[5-6]</sup>被应用于系统的故障诊断中。

当系统发生执行器与传感器并发故障时,系统可建模为广义系统的形式。广义系统,又称描述系统,奇异系统等,相较于状态空间系统,具有更好的动态和静态描述特性,因此已被广泛应用于电路<sup>[7]</sup>、高铁<sup>[8-9]</sup>、航天器<sup>[10]</sup>和直流电机<sup>[11-12]</sup>等实际系统和装置的故障诊断领域,并取得了良好的效果。在广义系统的故障诊断领域内,故障估计不仅能够有效辨识故障的特性、大小,而且能够为容错控制提供基础,因此,针对广义系统故障估计的研究尤为重要。

收稿日期:2022-04-24

\* 基金项目:辽宁省教育厅基金(JDL2020020)、常州市应用基础研究计划(CJ2020007)项目资助

但是,鉴于广义系统动态项中含有奇异矩阵,传统的 Kalman 滤波方法较难实现其系统的滤波估计。因此,迫切需要新的 Kalman 滤波方法,以解决广义系统的 Kalman 滤波估计。目前,已有诸多学者针对广义系统的 Kalman 滤波问题进行了研究。Tan 等<sup>[13]</sup>针对线性变参数广义系统,设计了 zonotopic 卡尔曼滤波器对其进行状态和故障估计。Liu 等<sup>[14]</sup>针对具有噪声不确定性和丢包的多传感器线性随机广义系统,提出了局部鲁棒时变卡尔曼滤波器。Zhang 等<sup>[15]</sup>针对具有未知有界扰动和噪声的线性广义系统,设计了 zonotopic 卡尔曼滤波器,并用 Frobenius 范数最小化方法来设计其增益矩阵,实现了传感器故障的区间估计。但是,上述针对广义系统卡尔曼滤波的研究,系统模型多是线性的。作者前期基于无迹 Kalman 滤波,结合强跟踪算法<sup>[16]</sup>和自适应算法<sup>[17]</sup>,分别研究了广义系统的 Kalman 滤波估计问题,但是,上述方案在测量输出变化较小的前提下,将测量输出视为系统的过程噪声,在设计上具有一定的保守性。另外,由于系统噪声测量值与真实值之间可能存在误差,导致滤波精度降低乃至发散,吕旭等<sup>[18]</sup>针对此类问题,提出了粒子群算法对噪声进行寻优,然而其存在寻优精度低,易陷入局部最优解的问题。因此,如何利用智能优化算法寻优系统噪声,提高滤波精度,尤为值得研究。

综上所述,本文结合增广滤波器、扩展 Kalman 滤波和改进鲸群算法(improve whale optimization algorithm, IWOA),针对具有执行器、传感器并发故障的非线性系统模型,建立非线性广义系统模型,设计鲁棒增广扩展 Kalman 滤波器(robust augmented extended Kalman filter, RAEKF)。相较于前期研究方法,本论文的创新如下:1)基于非线性广义系统和鲁棒 Kalman 滤波思想,研究了非线性系统的并发故障估计问题,拓展了广义系统 Kalman 滤波理论和故障估计理论。2)增广噪声中无需考虑测量输出的影响,降低了前期方案中设计的保守性。3)引入了 IWOA 智能优化算法,相较于以往方法,该算法对噪声具有更好的寻优效果。

### 1 系统建模

考虑具有执行器和传感器故障的非线性系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{F}f_{a,k} + \mathbf{W}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{F}_s f_{s,k} + \mathbf{V}_k \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n, \mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^m, \mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^r$  分别为状态向量,输入向量和输出向量,  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{r \times n}$  为相应的系统矩阵,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$  为关于  $\mathbf{x}_k$  的非线性函数,  $f_{a,k} \in \mathbf{R}^p$  与  $f_{s,k} \in \mathbf{R}^q$  分别为执行器和传感器故障,  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{F}_s$  分别为执行器和传感器故障的系数矩阵,  $\mathbf{W}_k \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{V}_k \in \mathbf{R}^m$  满足:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{W}_k) &= 0, E(\mathbf{V}_k) = 0, \\ E \left[ \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_k \\ \mathbf{V}_k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_k^T & \mathbf{V}_k^T \end{Bmatrix} \right] &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定义  $\bar{n} = n + p + q$ , 为保证系统的可观性,定义执行器

故障的参考输出为  $\mathbf{y}_{p,k} = \mathbf{C}_p f_{a,k} + \mathbf{V}_{p,k}, \mathbf{C}_p \in \mathbf{R}^p$ , 其中  $\mathbf{V}_{p,k}$  为参考输出的零均值白噪声,且其协方差  $\mathbf{R}_{p,k}$  为极小的常值。将故障视为状态变量,则式(1)可建模为广义系统式(2):

$$\begin{cases} \mathbf{E}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}_k) + \bar{\mathbf{W}}_k \\ \bar{\mathbf{y}}_k = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}_k + \bar{\mathbf{V}}_k \end{cases} \quad (2)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\bar{n}-q} & 0_{(\bar{n}-q) \times q} \\ 0_{q \times (\bar{n}-q)} & 0_{q \times q} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}, \\ \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}_k) &= [\mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \quad 0_{(p+q) \times 1}]^T, \\ \bar{\mathbf{x}}_k &= [\mathbf{x}_k \quad f_{a,k} \quad f_{s,k}]^T, \bar{\mathbf{y}}_k = [\mathbf{y}_k \quad \mathbf{y}_{p,k}]^T, \\ \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{F} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0_q \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 & \mathbf{I}_q \\ 0 & \mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{W}}_k = [\mathbf{W}_k \quad 0_{(p+q) \times 1}]^T, \bar{\mathbf{V}}_k = [\mathbf{V}_k \quad \mathbf{V}_{p,k}]^T,$$

$$E(\bar{\mathbf{W}}_k \bar{\mathbf{W}}_k^T) = \bar{\mathbf{Q}}_k = \text{diag}(\mathbf{Q}_k, 0_{(p+q) \times (p+q)}),$$

$$E(\bar{\mathbf{V}}_k \bar{\mathbf{V}}_k^T) = \bar{\mathbf{R}}_k = \text{diag}(\mathbf{R}_k, \mathbf{R}_{p \times p, k})$$

假设 1:  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{F}_s$  满足:  $\text{rank}(\mathbf{F}) = p, \text{rank}(\mathbf{F}_s) = q$ , 且

( $\bar{\mathbf{A}} \quad \bar{\mathbf{C}}$ ) 满足完全可检测条件<sup>[7]</sup>, 即

$$\text{rank}[\mathbf{E}^T \quad \bar{\mathbf{C}}^T]^T = \bar{n} \quad (3)$$

$$\text{rank}[(\mathbf{z}\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}})^T \quad \bar{\mathbf{C}}^T]^T = \bar{n} \quad (4)$$

引理 1: 对于已知矩阵  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ , 其中  $\zeta_4$  满足  $\zeta_4^T \zeta_4 \leq \mathbf{I}$ , 如果存在一个正标量  $\kappa$  和一个对称正定矩阵  $\mathbf{U}$  满足

$$\kappa^{-1} \mathbf{I} - \zeta_3 \mathbf{U} \zeta_3^T > 0 \quad (5)$$

那么式(4)成立

$$\begin{aligned} &(\zeta_1 + \zeta_2 \zeta_4 \zeta_3) \cdot \mathbf{U} \cdot (\zeta_1 + \zeta_2 \zeta_4 \zeta_3)^T \leq \\ &\zeta_1 \cdot (\mathbf{U}^{-1} - \kappa \zeta_3^T \zeta_3)^{-1} \cdot \zeta_1^T + \kappa^{-1} \zeta_2 \zeta_2^T \end{aligned} \quad (6)$$

### 2 鲁棒增广 Kalman 滤波器设计

针对广义系统式(2),设计如式(7)所示的 RAEKF:

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{k+1} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}\hat{\bar{\mathbf{x}}}_k + \mathbf{T}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \mathbf{T}\mathbf{g}(\hat{\bar{\mathbf{x}}}_k) + \mathbf{K}_k(\bar{\mathbf{y}}_k - \bar{\mathbf{C}}\hat{\bar{\mathbf{x}}}_k) + \mathbf{N}\bar{\mathbf{y}}_{k+1} \quad (7)$$

其中,  $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_k$  表示的  $\bar{\mathbf{x}}_k$  估计值,  $\mathbf{K}_k, \mathbf{T}$  和  $\mathbf{N}$  分别为待设计的系数矩阵,且非奇异矩阵  $\mathbf{T}$  和矩阵  $\mathbf{N}$  满足:

$$\mathbf{T}\mathbf{E} + \mathbf{N}\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{I}_{\bar{n}} \quad (8)$$

$\mathbf{T}$  和  $\mathbf{N}$  的通解可由:

$$[\mathbf{T} \quad \mathbf{N}] = \bar{\mathbf{E}}^\dagger + \mathbf{Y}(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{E}}^\dagger) \quad (9)$$

求解得到,其中,  $\bar{\mathbf{E}} = [\bar{\mathbf{E}}\mathbf{T} \quad \bar{\mathbf{C}}\mathbf{T}]^T, \mathbf{Y}$  为任意矩阵,代表设计自由度,  $\dagger$  代表伪逆。

定义  $\tilde{\bar{\mathbf{x}}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k - \hat{\bar{\mathbf{x}}}_k, \Sigma_k = E(\tilde{\bar{\mathbf{x}}}_k \tilde{\bar{\mathbf{x}}}_k^T)$ , 对  $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}_k)$  在  $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_k$  处进行泰勒展开。

$$g(\bar{x}_k) = g(\hat{x}_k) + \mathbf{O}_k \bar{x}_k + \mathbf{M}_k \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{F}_g \bar{x}_k \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{O}_k = \partial g(\bar{x}_k) / \partial \bar{x}_k$ ,  $\mathbf{M}_k$  为缩放矩阵, 用以调节因系统线性化所导致的误差;  $\boldsymbol{\alpha}_k \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为未知矩阵, 且  $\boldsymbol{\alpha}_k$  满足  $\boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{\alpha}_k^T \leq \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{F}_g \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 用以调节滤波器参数。

因此, 由式(2)、(7)和(10)可得到估计误差  $\bar{x}_k$  为:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= (\mathbf{T}\mathbf{E} + \mathbf{N}\bar{\mathbf{C}}) \bar{x}_k - \hat{x}_k = (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}}) \bar{x}_k + \\ &\mathbf{T}[g(\bar{x}_k) - g(\hat{x}_k)] + \mathbf{T}\bar{\mathbf{W}}_k - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{V}}_k - \mathbf{N}\bar{\mathbf{V}}_{k+1} = (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \\ &\bar{\mathbf{C}} + \mathbf{T}\mathbf{M}_k \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{F}_g) \bar{x}_k + \mathbf{T}\bar{\mathbf{W}}_k - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{V}}_k - \mathbf{N}\bar{\mathbf{V}}_{k+1} \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\bar{\mathbf{A}}_L = (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{O}_k)$ , 由此可得估计误差的协方差为:

$$\begin{aligned} \Sigma_{k+1} &= (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{T}\mathbf{M}_k \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{F}_g) \Sigma_k \cdot (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}} + \\ &\mathbf{T}\mathbf{M}_k \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{F}_g)^T + \mathbf{T}\bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{T}^T + \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{R}}_k \mathbf{K}_k^T + \mathbf{N}\bar{\mathbf{R}}_{k+1} \mathbf{N}^T \end{aligned} \quad (12)$$

基于式(12)以及引理 1, 若存在正标量  $\gamma$  满足:

$$\gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{F}_g \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{F}_g^T > 0 \quad (13)$$

则对于广义系统式(2)及其相应滤波器, 估计误差的协方差矩阵满足:

$$\mathbf{P}_0 = \Sigma_0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}}) \bar{\mathbf{P}}_k (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}})^T + \\ &\gamma^{-2} \mathbf{T}\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k^T \mathbf{T}^T + \mathbf{T}\bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{T}^T + \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{R}}_k \mathbf{K}_k^T + \mathbf{N}\bar{\mathbf{R}}_{k+1} \mathbf{N}^T = \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L \bar{\mathbf{P}}_k (\mathbf{T} \\ &\bar{\mathbf{A}}_L)^T - \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L \bar{\mathbf{P}}_k (\mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}})^T - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{P}}_k (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L)^T + \gamma^{-2} \mathbf{T}\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k^T \mathbf{T}^T + \\ &\mathbf{T}\bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{T}^T + \mathbf{K}_k (\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{C}}^T + \bar{\mathbf{R}}_k) \mathbf{K}_k^T + \mathbf{N}\bar{\mathbf{R}}_{k+1} \mathbf{N}^T \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $\bar{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{P}_k - \gamma^{-2} \mathbf{F}_g^T \mathbf{F}_g)^{-1}$ ,  $\mathbf{F}_g$  为单位矩阵。

令  $\mathbf{G}_k \mathbf{G}_k^T = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{C}}^T + \bar{\mathbf{R}}_k$ ,  $\mathbf{H}_k = \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L \bar{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{G}_k^{-T}$ , 则有:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L \bar{\mathbf{P}}_k (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L)^T - \mathbf{H}_k \mathbf{G}_k^T \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{G}_k^T \mathbf{H}_k^T + \\ &\mathbf{K}_k \mathbf{G}_k \mathbf{G}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{T}\bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{T}^T + \mathbf{N}\bar{\mathbf{R}}_{k+1} \mathbf{N}^T + \gamma^{-2} \mathbf{T}\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k^T \mathbf{T}^T = \\ &\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L \bar{\mathbf{P}}_k (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L)^T + \mathbf{T}\bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{T}^T + \mathbf{N}\bar{\mathbf{R}}_{k+1} \mathbf{N}^T + \gamma^{-2} \mathbf{T}\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k^T \mathbf{T}^T - \\ &\mathbf{H}_k \mathbf{H}_k^T + (\mathbf{K}_k \mathbf{G}_k - \mathbf{H}_k) (\mathbf{K}_k \mathbf{G}_k - \mathbf{H}_k)^T \end{aligned} \quad (16)$$

使得  $\Sigma_{k+1} \leq \mathbf{P}_{k+1}$ 。为使  $\mathbf{P}_{k+1}$  最小, 令:

$$\mathbf{K}_k \mathbf{G}_k = \mathbf{H}_k \quad (17)$$

对式(17)两侧同时右乘  $\mathbf{G}_k^T$  得到:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L \bar{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{C}}^T (\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{C}}^T + \bar{\mathbf{R}}_k)^{-1} \quad (18)$$

将式(18)代入式(16)得:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L \bar{\mathbf{P}}_k (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L)^T + \mathbf{T}\bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{T}^T + \mathbf{N}\bar{\mathbf{R}}_{k+1} \mathbf{N}^T + \\ &\gamma^{-2} \mathbf{T}\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k^T \mathbf{T}^T - \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L \bar{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{C}}^T (\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{C}}^T + \bar{\mathbf{R}}_k) \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{P}}_k (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L)^T \end{aligned} \quad (19)$$

基于上述推导, 得到估计误差协方差  $\Sigma_{k+1}$  的鲁棒上界  $\mathbf{P}_{k+1}$  及滤波增益  $\mathbf{K}_k$ 。

定理 1: 对于广义系统式(2), 若其满足式(13), 且

$\det[(\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{T}\mathbf{M}_k \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{F}_g)] \neq 0, \det[\mathbf{F}_g] \neq 0$ , 则:

$$\frac{\sum_{k=0}^n \|\bar{x}_{k+1}\|_{\mathbf{F}_g^T \mathbf{F}_g}^2}{\|\bar{x}_0\|_{\mathbf{P}_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} (\|\bar{\mathbf{W}}_k\|_{\bar{\mathbf{Q}}_k^{-1}}^2 + \|\bar{\mathbf{V}}_k\|_{\bar{\mathbf{R}}_k^{-1}}^2) + \sum_{k=0}^n \|\bar{\mathbf{V}}_{k+1}\|_{\bar{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1}}^2} \leq \gamma^2 \quad (20)$$

于是, 本文设计的 RAEKF 滤波器具有鲁棒性。

证明: 由式(11)可得:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_{k+1}\|_{\mathbf{P}_{k+1}^{-1}}^2 &= \mathbf{E}(\bar{x}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^{-1} \bar{x}_{k+1}) = \\ &\mathbf{E}\{\bar{x}_k^T (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{T}\mathbf{M}_k \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{F}_g)^T \mathbf{P}_{k+1}^{-1} \cdot \\ &(\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{T}\mathbf{M}_k \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{F}_g) \bar{x}_k + \bar{\mathbf{W}}_k^T \mathbf{T}^T \mathbf{P}_{k+1}^{-1} \mathbf{T}\bar{\mathbf{W}}_k + \\ &\bar{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{K}_k^T \mathbf{P}_{k+1}^{-1} \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{V}}_k + \bar{\mathbf{V}}_{k+1}^T \mathbf{N}^T \mathbf{P}_{k+1}^{-1} \mathbf{N}\bar{\mathbf{V}}_{k+1}\} \end{aligned} \quad (21)$$

由式(12)得:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &\geq (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{T}\mathbf{M}_k \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{F}_g)^T \mathbf{P}_k \cdot \\ &(\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{T}\mathbf{M}_k \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{F}_g) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} \geq \mathbf{T}\bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{T}^T \quad (23)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} \geq \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{R}}_k \mathbf{K}_k^T \quad (24)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} \geq \mathbf{N}\bar{\mathbf{R}}_{k+1} \mathbf{N}^T \quad (25)$$

于是可以得到:

$$\begin{aligned} \bar{x}_k^T (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{T}\mathbf{M}_k \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{F}_g)^T \mathbf{P}_{k+1}^{-1} \cdot (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}_L - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{C}} + \\ \mathbf{T}\mathbf{M}_k \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{F}_g) \bar{x}_k \leq \bar{x}_k^T \mathbf{P}_k^{-1} \bar{x}_k + \gamma^{-2} \bar{x}_k^T \mathbf{F}_g^T \mathbf{F}_g \bar{x}_k \end{aligned} \quad (26)$$

$$\bar{\mathbf{W}}_k^T \mathbf{T}^T \mathbf{P}_{k+1}^{-1} \mathbf{T}\bar{\mathbf{W}}_k \leq \bar{\mathbf{W}}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k^{-1} \bar{\mathbf{W}}_k \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{K}_k^T \mathbf{P}_{k+1}^{-1} \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{V}}_k \leq \bar{\mathbf{V}}_k^T \bar{\mathbf{R}}_k^{-1} \bar{\mathbf{V}}_k \quad (28)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{k+1}^T \mathbf{N}^T \mathbf{P}_{k+1}^{-1} \mathbf{N}\bar{\mathbf{V}}_{k+1} \leq \bar{\mathbf{V}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_{k+1} \quad (29)$$

由(26)到(29)可得:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_{k+1}\|_{\mathbf{P}_{k+1}^{-1}}^2 &\leq \|\bar{x}_k\|_{\mathbf{P}_k^{-1}}^2 + \gamma^{-2} \|\bar{x}_k\|_{\mathbf{F}_g^T \mathbf{F}_g}^2 + \|\bar{\mathbf{W}}_k\|_{\bar{\mathbf{Q}}_k^{-1}}^2 + \\ &\|\bar{\mathbf{V}}_k\|_{\bar{\mathbf{R}}_k^{-1}}^2 + \|\bar{\mathbf{V}}_{k+1}\|_{\bar{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1}}^2 \end{aligned} \quad (30)$$

式(30)使用归纳法得到:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_n\|_{\mathbf{P}_n^{-1}}^2 &\leq \|\bar{x}_0\|_{\mathbf{P}_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} (\gamma^{-2} \|\bar{x}_k\|_{\mathbf{F}_g^T \mathbf{F}_g}^2 + \\ &\|\bar{\mathbf{W}}_k\|_{\bar{\mathbf{Q}}_k^{-1}}^2 + \|\bar{\mathbf{V}}_k\|_{\bar{\mathbf{R}}_k^{-1}}^2) + \sum_{k=0}^n \|\bar{\mathbf{V}}_{k+1}\|_{\bar{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1}}^2 \end{aligned} \quad (31)$$

由式(13)得到:

$$\mathbf{P}_n^{-1} > \gamma^{-2} \mathbf{F}_g^T \mathbf{F}_g \quad (32)$$

最后, 由式(29)和(30)可得到 RAEKF 滤波器的鲁棒性为:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \|\bar{x}_{k+1}\|_{\mathbf{F}_g^T \mathbf{F}_g}^2 &\leq \gamma^2 [\|\bar{x}_0\|_{\mathbf{P}_0^{-1}}^2 + \\ &\sum_{k=0}^{n-1} (\|\bar{\mathbf{W}}_k\|_{\bar{\mathbf{Q}}_k^{-1}}^2 + \|\bar{\mathbf{V}}_k\|_{\bar{\mathbf{R}}_k^{-1}}^2) + \sum_{k=0}^n \|\bar{\mathbf{V}}_{k+1}\|_{\bar{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1}}^2] \end{aligned} \quad (33)$$

定理 1 证毕。

### 3 改进鲸鱼算法

大多数情况下, 由于噪声测量值与真实值之间存在误差, 可能导致滤波精度降低, 因此, 使用 WOA 算法对噪声矩阵进行寻优, 而传统的 WOA 存在寻优精度低以及易陷入局部最优解的问题, 因此, 本文基于改进反向学习法和非线性收敛因子得到 IWOA。

假设鲸鱼种群规模为  $J$ , 扩展至  $\sigma$  维, 第  $j$  个粒子在  $\sigma$

维空间中的位置矢量随机选取为  $\mathbf{S}_j = [s_{1j}, s_{2j}, \dots, s_{mj}]^T$ ,  $s_{ij} \in [a_j, b_j]$ , 求其折射反向解:

$$s'_{ij} = (1 + \epsilon)avg_j - \epsilon s_{ij} \quad (34)$$

其中,  $\epsilon = l^*/l$ ,  $l$  和  $l^*$  分别为入射和折射光线的长度,  $avg_j = (b_j - a_j)/2$ 。

广义柯西分布相较于柯西分布具有更大的散布特性, 可以最大程度寻找粒子周围的优良解。服从参数为  $m$  的广义柯西分布函数为:

$$Dcauchy = \rho[1 + (s'_{ij}/2\delta^2)^m]^{-1} \quad (35)$$

$$s''_{ij} = s'_{ij} + s'_{ij}Dcauchy \quad (36)$$

其中,  $\delta = \sqrt{2}\Phi$ ,  $\Phi$  为峰值一半处的一半宽度的尺度函数,  $\rho$  为大于 0.5 的实数。将  $s'_{ij}$  与  $s''_{ij}$  合并, 使用适应度函数对其进行筛选取优。IWOA 粒子位置更新公式如下:

$$\mathbf{S}_{j,k+1} = \begin{cases} \mathbf{S}_{j,k}^* - \zeta\mathbf{D} & p < 0.5 \\ \mathbf{S}_{j,k}^* - \mathbf{D}'\cos(2\pi l)e^{\beta l} & p \geq 0.5 \\ \mathbf{S}_{j,k}^{rand} - \zeta\mathbf{D}'' & |\zeta| \geq 1 \end{cases} \quad (37)$$

其中,  $k$  为迭代次数,  $\mathbf{S}_j$  为当前粒子位置,  $\mathbf{S}_j^*$  代表最优粒子的位置,  $\mathbf{S}_{j,k}^{rand}$  为当前群体中随机一个粒子的位置,  $\beta$  是定义螺旋形状的常数,  $l$  为 -1 到 1 之间的随机数,  $\mathbf{D} = |\xi\mathbf{S}_{j,k}^* - \mathbf{S}_{j,k}|$ ,  $\mathbf{D}' = |\mathbf{S}_{j,k}^* - \mathbf{S}_{j,k}|$ ,  $\mathbf{D}'' = |\xi\mathbf{S}_{j,k}^{rand} - \mathbf{S}_{j,k}|$ ,  $\zeta = 2ar_1 - a$ ,  $\xi = 2r_2$ , 其中  $r_1, r_2$  为 0~1 之间的随机数,  $a$  为非线性收敛因子, 从 2 到 0 非线性减小, 其具体形式为

$$a = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(1 - \theta)\right) \quad (38)$$

其中,  $\theta = k/Itc$ ,  $Itc$  为最大迭代次数。

本文选用状态变量真实值和估计值之间的差值作为适应度函数, 对噪声协方差矩阵  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  进行寻优。求解估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  的具体步骤如下:

- 步骤 1) 给定状态估计值及其协方差的初值  $\hat{\mathbf{x}}_0$  和  $\mathbf{P}_0$ 。
- 步骤 2) 由式(19)得到  $\mathbf{K}_k$ , 将优化后的  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  代入式(20)得到  $\mathbf{P}_{k+1}$ 。
- 步骤 3) 最后由式(7)得到估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ 。
- 步骤 4) 重复步骤 1)~3)。

### 4 仿真验证

本节选用 F-16 飞机的纵向运动为研究对象, 对于广义系统式(2),  $\bar{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{x}_{1,k} \ \mathbf{x}_{2,k} \ f_{a,k} \ f_{s,k}]^T$ , 分别表示飞机的迎角和俯仰角速度、执行器和传感器故障。取  $\gamma = 0.01, \mathbf{M}_k = 0$ 。选取的模型系数矩阵为:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0.9879 & 0.0098 & -0.0029 & 0 \\ 0.0837 & 0.9908 & -0.1919 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.0029 & -0.0005 \\ -0.1919 & -0.0378 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$g(\bar{\mathbf{x}}_k) = [0 \ 0.003 \ 3\sin(\bar{\mathbf{x}}_{2,k}) \ 0 \ 0]^T,$$

系统执行器发生突变故障, 传感器发生时变故障, 形式如下:

$$f_{a,k} = \begin{cases} 3, & 6 \leq t \leq 15 \\ 0, & t < 6, t > 15 \end{cases} \quad (39)$$

$$f_{s,k} = \begin{cases} 3\sin[4(t-18)], & 18 \leq t \leq 30 \\ 0, & t < 18, t > 30 \end{cases} \quad (40)$$

在式(9)中, 选择  $\mathbf{S}$  的值为:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则得到非奇异矩阵  $\mathbf{T}$  和矩阵  $\mathbf{N}$  的值为:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.455 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9803 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0.545 & 0 & 0 \\ 0 & 1.43^{-16} & 0 \\ 0 & 0 & 0.197 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

分别使用自适应无迹 Kalman 滤波器 (adaptive unscented Klaman filter, AUKF)<sup>[17]</sup>、WOA-RAEKF 以及 IWOA-RAEKF 进行状态与故障估计, 得到图 1~4。状态值和故障的估计值的 RMSE(root mean square error) 分别如表 1 和 2。

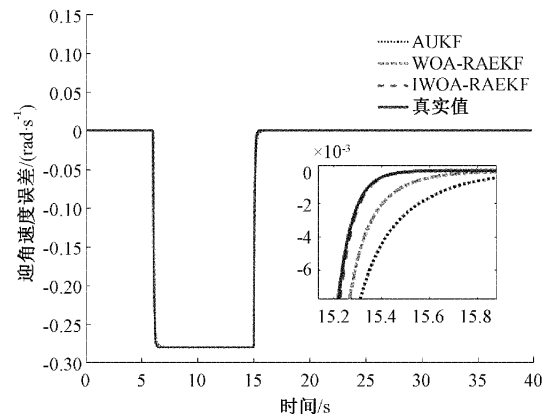


图 1 迎角速度估计误差曲线

从图 1 和 2 可以看出, 在未发生故障时, AUKF、WOA-RAEKF 和 IWOA-RAEKF 对状态量的估计精度相差不大, 但在发生故障后, 三者均存在一定的误差, 但经由 IWOA 算法优化噪声后的 RAEKF 对状态量的估计更精

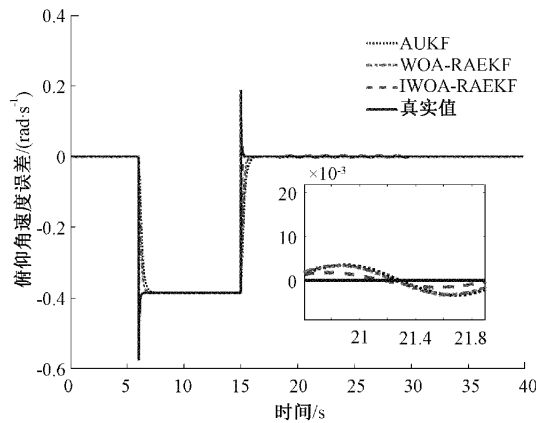


图 2 俯仰角速度估计误差曲线

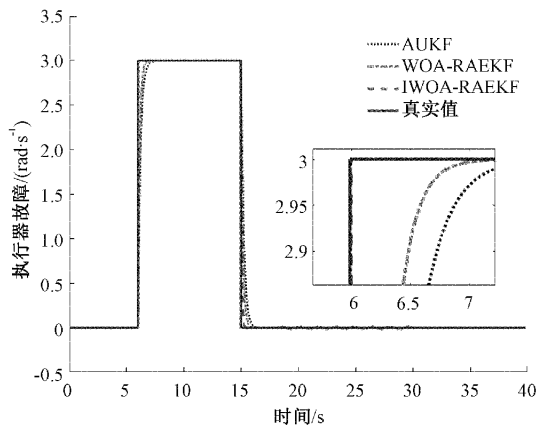


图 3 执行器故障估计

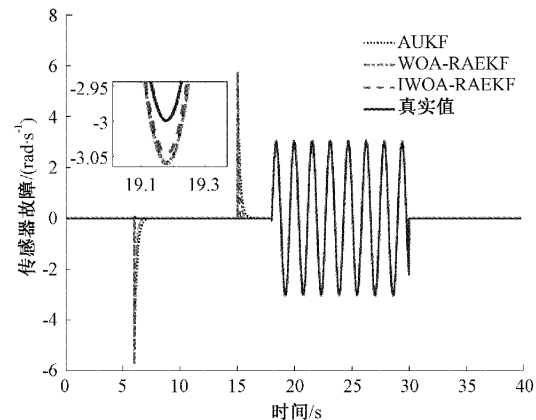


图 4 传感器故障估计

确。表 1 进一步显示了 IWOA-RAEKF 的估计精度,在系统发生故障时,IWOA-RAEKF 对于状态量的估计误差 RMSE 相较于 AUKF 降低了 66.7% 和 53.6%,相较于 WOA-RAEKF 降低了 57.1% 和 44.8%。

由图 3 和 4 可以看出,由 IWOA 算法优化噪声后的 RAEKF 的估计精度优于 RUKF 以及由 WOA 算法优化噪声后的 RAEKF,由表 2 可知 IWOA-RAEKF 对于执行器和传感器的估计误差 RMSE 相较于 AUKF 分别降低了

表 1 状态估计值的 RMSE

算法	RMSE	
	$x_1$	$x_2$
AUKF	0.001 8	0.041 2
WOA-RAEKF	0.001 4	0.034 6
IWOA-RAEKF	0.000 6	0.019 1

表 2 故障估计值的 RMSE

算法	RMSE	
	$f_{a,k}$	$f_{s,k}$
AUKF	0.221 8	0.414 6
WOA-RAEKF	0.183 9	0.349 6
IWOA-RAEKF	0.092 0	0.193 5

58.5% 和 53.3%,相较于 WOA-RAEKF 分别降低了 50% 和 44.7%。基于以上分析,在对系统噪声矩阵进行寻优后,由 IWOA 算法寻优噪声后的 RAEKF 实现了更高的状态量和故障估计精度。仿真结果验证了该方法的有效性。

## 5 结 论

本文基于非线性广义系统模型,提出了一类非线性系统并发故障估计的 RAEKF,针对噪声测量值与真实值之间可能存在误差,从而导致滤波估计精度降低的问题,结合 IWOA 智能优化算法对系统噪声矩阵参数进行寻优,给出 F-16 飞机的纵向运动的数值仿真模型,并分别与 AUKF 和 WOA-RAEKF 进行对比仿真,仿真结果表明,IWOA-RAEKF 的滤波精度较高,实现了更精确的状态与故障估计。仿真验证了设计方案的有效性。该方案可为后续非线性时滞系统并发故障诊断提供了理论基础。

## 参考文献

- [1] 杨永灿,刘韬,王振亚,等. 基于 SincNet 网络结合注意力机制齿轮箱故障诊断[J]. 电子测量技术, 2022, 45(5):169-174.
- [2] 祁斌,赵源. 基于神经网络的直流微电网故障诊断方法研究[J]. 国外电子测量技术, 2021, 40(4):121-124.
- [3] 王辉,徐佳文,严如强. 基于深度卷积神经网络行星齿轮箱故障智能诊断方法[J/OL]. 仪器仪表学报, 2022(3):43.
- [4] XI Y, ZHANG X, LI Z, et al. Double-ended travelling-wave fault location based on residual analysis using an adaptive EKF[J]. IET Signal Processing, 2018, 12(8): 1000-1008.
- [5] LIU L, SHEN Y, DOWELL E H. Integrated adaptive fault-tolerant output feedback control with adaptive fault identification[J]. Journal of guidance control and dynamics(S0731-5090), 2012, 35(3):881-889.
- [6] CHEN X, SUN R, WANG F, et al. Two-stage

- unscented Kalman filter algorithm for fault estimation in spacecraft attitude control system[J]. IET Control Theory & Applications(S1751-8644), 2018, 12(13): 1781-1791.
- [7] WANG Z, SHEN Y, ZHANG X. Actuator fault estimation for a class of nonlinear descriptor systems [J]. International Journal of Systems Science, 2014, 45(3): 487-496.
- [8] MAO ZH, ZHAN YH, Tao G, et al. Sensor fault detection for rail vehicle suspension systems with disturbances and stochastic noises [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology(S0018-9545), 2017; 66: 4691-05.
- [9] WU Y, JIANG B, LU N. A descriptor system approach for estimation of incipient faults with application to high-speed railway traction devices[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49: 2108-2118.
- [10] 梁天添, 刘鑫, 郑祥, 等. 一类不确定广义系统故障估计的有限时间鲁棒观测器设计[J]. 中国惯性技术学报, 2021, 29(3): 414-420.
- [11] BESSAOUDI T, HMIDA F B, HSIEH C S. Robust state and fault estimation for linear descriptor stochastic systems with disturbances: a direct current motor application [J]. IET Control Theory and Applications, 2016, 11: 601-610.
- [12] ZHANG W, WANG Z, RAISSI T, et al. A state augmentation approach to interval fault estimation for descriptor systems[J]. European Journal of Control, 2020, 51: 19-29.
- [13] TAN J, XU F, OLARU S, et al. ZKF-based optimal robust fault estimation of descriptor LPV systems with measurement error-affected scheduling variables [J]. ISA Transactions, 2019, 94: 119-134.
- [14] LIU W T, ZHENG J Y, DOU Y F, et al. Robust fusion filter for multisensor descriptor system with uncertain-variance noises and packet dropout [J]. Optimal Control Applications and Methods, 2022.
- [15] ZHANG W, WANG Z, GUO S, et al. Interval estimation of sensor fault based on zonotopic Kalman filter [J]. International Journal of Control, 2021, 94(6): 1641-1650.
- [16] 梁天添, 王茂. 基于改进强跟踪滤波的广义系统传感器故障诊断及隔离[J]. 中国惯性技术学报, 2018, 26(4): 554-560.
- [17] WANG M, LIANG T. Adaptive Kalman filtering for sensor fault estimation and isolation of satellite attitude control based on descriptor systems[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2019, 41(6): 1686-1698.
- [18] 吕旭, 胡柏青, 戴永彬, 等. 基于 PSO 的 USQUE 在组合导航姿态估计中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2020, 42(6): 1366-1371.

#### 作者简介

李科信, 硕士, 主要研究方向为故障诊断技术。

E-mail: likexin2726793001@163.com