基于 QUEST 算法的捷联惯导惯性系对准精度分析*

袁群哲　郑振宇　韩云东
（海军大连舰艇学院 大连 116018）

摘　要：针对基于矢量定姿的惯性系对准方法的对准精度问题，以对准解算模型及定姿误差模型为基础，详细推导了 QUEST 姿态确定算法在对准应用中的误差均方差并证明了其与传统 TRAID 算法精度的统一关系。蒙特卡洛仿真实验对比分析了重力矢量与重力积分矢量两种观测模式下，4 种定姿方案的惯性系对准精度。理论推导与仿真实验均表明，等精度观测条件下采用 QUEST 算法后，对准统计精度明显优于传统的 TRAID 算法，其中方位误差均方差约为传统算法的 1/6，为 QUEST 算法引入晃动基座精对准提供了理论与实验依据。

关键词：捷联惯导；初始对准；QEUST 算法；精度分析
中图分类号：TN966　　**文献标识码：**A　　**国家标准学科分类代码：**510.80

Error analysis of SINS alignment in inertial frame based on QUEST attitude determination algorithm

Yuan Qunzhe　Zheng Zhenyu　Han Yundong
（Dalian Navy Academy, Dalian 116018, China）

Abstract: The paper analyze and deduced the error of QUEST algorithm and the uniform relationship with traditional TRAID method for SINS alignment in inertial frame in detail. Monte-Carlo simulations analyzed the precision of observation scheme with gravity vectors and gravity integration vectors and the precision of different AD algorithms comparatively. Theory analysis and simulation test show that the QUEST algorithm can achieve the higher precision compared with TRAID under equivalent precision observation condition, and the variance of calculation drops to one sixth of the origin, which can give the theory foundation of algorithm application on rocking base alignment.

Keywords: SINS; initial alignment; QUEST algorithm; precision analyze

1　引　　言

近年来，基于重力矢量观测的惯性系对准方法已成为捷联惯导系统对准的研究热点[1-3]。该方法通过对惯性坐标系下重力矢量的圆锥运动进行观测，基于矢量定姿原理提取惯性姿态信息，将对准问题转换为基于矢量观测的定姿问题。同时，方法可克服基座晃动的影响，是船载捷联惯导系统海上对准的首选方案。传统的基于 TRAID 定姿算法的粗对准方法就是一种有效的双矢量定姿对准方法，它通过提取对准期间两个时刻的非正交矢量信息，直接确定姿态矩阵，具有算法简单、运算量小等优点。文献[3]针对这种对准算法的对准误差进行了系统的推导与数值分析。由于 TRAID 算法具有不对称性，以不同矢量为基准构建正交矢量得到的结果不一致，解算结果并非最优解，文献[4]将这种最优算法应用于对准中，以期提高对准精度，但仿真中未给出参数配置的具体方法，仿真结果有待商榷。文献[5]受双矢量定姿对准方法的启发，提出以比力在不同时间段积分得到速度增量构建多组观测矢量，将对准问题转换为最小二乘意义下的矢量定姿问题，即 Wahba 问题，并将 QUEST 定姿算法应用于对准中。文献[6]在此基础上指出随着对准时间的递增，定姿观测信息浓度不断增大，并提出了基于 REQUEST 算法的对准方法。文献[7-8]结合以 QUEST 算法为核心的对准方法针对性提出了有效的抗扰动方案以增强方法的工程实用性。

然而，现有文献中均未给出基于 QUEST 算法的对准方法相对 TRAID 对准方法精度提高的本质原因。基于此本文将结合对准应用模型针对 TRAID 算法与 QUEST 两种矢量定姿算法的精度问题进行专门的推导与分析，构建算法的误差模型，并结合理论分析进行仿真验证，相关结论对于定姿算法在惯性系对准中的实际应用提供一定理论依据。

收稿日期：2016-11
*基金项目：科技部国防合作项目(2010DFR80140)、国家科技支撑计划课题(2012BAH36B03)资助项目

2　基于矢量定姿算法的惯性系对准原理

2.1　坐标系定义

1)载体系(b 系):原点位于载体质心,XYZ 轴指向载体右前上方向;

2)导航坐标系(n 系):选用 ENU 地理坐标系;

3)载体惯性系(b_0):t_0 时刻载体系凝固后的惯性坐标系;

4)导航惯性系(n_0):t_0 时刻导航系凝固后的惯性坐标系。

2.2　惯性系对准基本解算模型

以四元数为姿态表示形式,捷联惯导对准的最终目标是获得在 t 时刻 b 系相对 n 系的姿态四元数 $q_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}(t)$。惯性空间中两个坐标系都会随着时间推移发生变化,根据坐标系相对关系,$\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}}(t)$ 可分解为:

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}}(t)=\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}_0}^{\mathrm{b}}(t)\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}_0}^{\mathrm{b}_0}\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}_0}(t) \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}_0}^{\mathrm{b}}(t)$ 表征 b 系相对 b_0 系的姿态关系,对准初始时刻两坐标系重合,其初值为单位四元数,两个坐标系角位置变化关系可表示为:

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{b}_0}^{\mathrm{b}}(t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}_0}^{\mathrm{b}}(t)\otimes\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{\mathrm{b}} \tag{2}$$

式中:$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{\mathrm{b}}$ 为陀螺仪量测值,$\otimes$ 表示矢量叉乘。不难发现,将 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}}(t)$ 分解后,利用跟踪 b 系相对 b_0 系的角晃动,可起到隔离基座晃动的作用。

$\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}_0}(t)$ 的变化主要由地球自转及载体的线位移形成,运动方程可表示为:

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}_0}(t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}_0}(t)\otimes\boldsymbol{\omega}_{in}^{\mathrm{n}} \tag{3}$$

其中,$\boldsymbol{\omega}_{in}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{\omega}_{ie}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{\omega}_{en}^{\mathrm{n}}$,$\boldsymbol{\omega}_{ie}^{\mathrm{n}}$、$\boldsymbol{\omega}_{en}^{\mathrm{n}}$ 分别为地球自转角速度及位移速度矢量。当载体基座无较大幅度的线位移时有 $\boldsymbol{\omega}_{in}^{\mathrm{n}}\approx\boldsymbol{\omega}_{ie}^{\mathrm{n}}$,因此,只要通过地球自转角速度模型即可实现对 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}_0}(t)$ 的有效跟踪计算。

$\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}_0}^{\mathrm{b}_0}$ 的求解采用基于重力积分矢量观测的姿态解算方法。将惯性系下的比力观测 $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{b}_0}$ 经过低通滤波,滤除线性加速度干扰噪声,并积分得到速度矢量序列:

$$\boldsymbol{V}^{b_0}(t_k)=\int_{t_0}^{t_k}\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{b}_0}\,\mathrm{d}\tau\quad k=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

依据重力场模型,可计算得到重力矢量在 n_0 系的投影矢量 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{n}_0}$,同样积分得到:

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{n}_0}(t_k)=\int_{t_0}^{t_k}\boldsymbol{g}^{n_0}\,\mathrm{d}\tau\quad k=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

基于观测矢量组 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{b}_0}(t_k)$ 与矢量组 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{n}_0}(t_k)$,通过矢量定姿算法即可解算,最终利用式计算得到姿态四元数 $\boldsymbol{q}_{n}^{\mathrm{b}}(t)$,完成对准过程。

3　QUEST 矢量定姿算法基本原理

已知载体系下的一组观测单位矢量 $v_k(k=1,\cdots,n)$ 及其对应参考系下的单位参考矢量为 $\boldsymbol{w}_k$,矢量定姿的问题为寻求正交矩阵 $\boldsymbol{A}$,使其满足如下关系:

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{w}_k+\boldsymbol{e}_k \tag{6}$$

其中,$\boldsymbol{e}_k$ 代表观测误差,n 为观测矢量数。当 $n=2$ 时,形成观测矢量对 v_k 与参考矢量对 w_k($k=1,2$),且矢量对线性不相关。此时可通过解析方法直接计算姿态矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}^{-1} \tag{6}$$

其中,$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{m}_1\quad\boldsymbol{m}_2\quad\boldsymbol{m}_3]$,$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{n}_1\quad\boldsymbol{n}_2\quad\boldsymbol{n}_3]$,$\boldsymbol{m}_1=v_1/|v_1|$,$\boldsymbol{m}_2=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2/|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|$,$\boldsymbol{m}_3=\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2$,$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{w}_1/|\boldsymbol{w}_1|$,$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{w}_1\times\boldsymbol{w}_2/|\boldsymbol{w}_1\times\boldsymbol{w}_2|$,$\boldsymbol{n}_3=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$。这种利用一组矢量直接确定姿态的算法称为双矢量定姿算法(TRIAD 算法),是目前惯性系粗对准的常用定姿算法。当观测矢量数 $n>2$ 时,双矢量定姿算法不能充分利用观测信息,定姿精度的提高受到一定限制。

Wahba 在提出定姿问题的同时也相应建立了在最小二乘意义下的损失函数[10]:

$$L(\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k\,|\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_k|^2 \tag{8}$$

式中:a_k 为观测权重系数。显然,当 $L(A)$ 最小时所求 $\boldsymbol{A}$ 即为最小二乘意义下的最优姿态矩阵。表示为 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{opt}}$。Devenport 在此基础上建立了基于最小二乘的最优四元数损失函数[10]:

$$g(\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q},\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\sigma & \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{Z} & [\boldsymbol{S}-\sigma\boldsymbol{I}]\end{bmatrix} \tag{9}$$

其中,$\boldsymbol{Z}=\sum_{k=1}^{n}a_k\boldsymbol{v}_k\times\boldsymbol{w}_k$,$\sigma=tr(\boldsymbol{B})=\sum_{k=1}^{n}a_k\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{w}_k$,$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。

经证明,满足该损失函数最小的最优四元数估计即为 $\boldsymbol{K}$ 矩阵最大特征值 $\lambda_{\max}$ 对应的特征向量,存在如下关系:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{opt}}=\lambda_{\max}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{opt}} \tag{10}$$

此时定姿问题转换为特征值方程的解算问题,该种定姿解算方法称为 QUEST(quaternion ESTimator)算法。

4　矢量定姿算法精度的解析推导

4.1　TRAID 算法精度的解析推导

本文以定姿误差的协方差矩阵来考察定姿算法的精度。姿态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的误差阵定义为 $\delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\phi}\times$,其中 $\boldsymbol{\phi}$ 为姿态误差角,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的协方差阵为 $\boldsymbol{P}_A=\langle\delta\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\rangle$,$\delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-\langle\boldsymbol{A}\rangle$,符号$\langle\ \rangle$表示矩阵的期望。定义姿态误差角 ϕ 的协方差阵为 $\boldsymbol{P}_\phi=\langle\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\rangle$,展开后可建立 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\phi}}$ 与 $\boldsymbol{P}_A$ 的关系为:

$$\boldsymbol{P}_\phi=0.5tr(\boldsymbol{P}_A)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_A \tag{11}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{N}$ 为正交矩阵,根据正交矩阵的性质,有 $\boldsymbol{N}^{-1}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}$,根据协方差阵的定义有:

$$\boldsymbol{P}_A=\boldsymbol{P}_M+\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

式中:$\boldsymbol{P}_M$、$\boldsymbol{P}_N$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和量矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的协方差阵。在对准应用中参考矢量一般由模型提供,暂不考虑模型误差的

影响，因此有 $\boldsymbol{P}_A \approx \boldsymbol{P}_M$。

根据矢量方差阵的定义如式(13)。

$$\boldsymbol{P}_M = \sum_{i=1}^{3} \langle \delta \boldsymbol{m}_i \delta \boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}} \rangle, \delta \boldsymbol{m}_i = \frac{1}{|\boldsymbol{m}_i|}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}}) \delta \boldsymbol{m}_i \quad (13)$$

结合式(12)与式(13)计算 $\boldsymbol{P}_A$ 后代入式(11)可建立 TRAID 算法的姿态误差协方差阵如式(14)。

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\phi}} = \left[(\sigma_2^2 + \sigma_1^2)\frac{1}{|\boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_1|^2} - \sigma_1^2\right]\sigma_1^2 I + \frac{1}{|w_1 \times w_1|^2} \times [(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) w_1 w_1^{\mathrm{T}} + \sigma_1^2 (w_1 \cdot w_2)(w_1 w_2^{T} + w_2 w_1^{T})] \quad (14)$$

其中，σ_1^2、σ_2^2 为矢量观测方差，当 $w_1 \cdot w_2 \approx v_1 \cdot v_2$ 时，式(14)可简化为：

$$P_{\varphi} = \sigma_1^2 I + |w_1 \times w_1|^{-2}[(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) w_1 w_1^{\mathrm{T}} + \sigma_1^2 (w_1 \cdot w_2)(w_1 w_2^{\mathrm{T}} + w_2 w_1^{\mathrm{T}})] \quad (15)$$

4.2 QUEST 算法精度的解析推导

假设定姿计算四元数 $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ 与真值 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{true}}$ 的关系为：

$$\tilde{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{true}} \otimes \delta \boldsymbol{Q} \quad (16)$$

其中，$\delta \boldsymbol{Q} = [\delta q \quad \delta \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，表示四元数误差，由于误差项为小角度转动，可利用四元数旋转矢量部分 $\delta \boldsymbol{q}$ 表示姿态误差，此时该误差与姿态误差角 $\boldsymbol{\phi}$ 之间的关系为：

$$\delta \boldsymbol{q} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi} \quad (17)$$

则以 $\delta \boldsymbol{q}$ 表示的姿态误差协方差阵为：

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{Q}} = \delta \boldsymbol{q} \delta \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \quad (18)$$

同理可得到 $\boldsymbol{P}_{\tilde{Q}}$ 与误差角协方差阵 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\phi}}$ 的关系为：

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{Q}} = \frac{1}{4} \boldsymbol{P}_{\phi} \quad (19)$$

建立 $\delta \boldsymbol{q}$ 与观测矢量误差 $\delta \boldsymbol{v}$ 之间的关系，将式(9)中 $\boldsymbol{K}$ 矩阵分块展开，并对其变形可得到：

$$\boldsymbol{Y} = [(\lambda + \sigma)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}]^{-1} \boldsymbol{Z}, \lambda = \sigma + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{Y} \quad (20)$$

其中，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{q}/q_0 = \boldsymbol{u}\tan(\theta/2)$，该量称为四元数 $\boldsymbol{q}$ 对应的吉布斯向量，在方向上与四元数矢量部分相同，在误差上有 $\delta \boldsymbol{q} \triangleq \delta \boldsymbol{Y}$。此时，对式(20)微分后，可建立关系式：

$$\delta \boldsymbol{q} \triangleq \delta \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{M}^{-1} \delta \boldsymbol{Z}, \delta \boldsymbol{Z} = \sum_{k=1}^{n} a_i (\boldsymbol{w}_k \times \delta \boldsymbol{v}^k) \quad (21)$$

其中，$\boldsymbol{M} = (\lambda + \sigma)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}$。由于 $\boldsymbol{P}_{\tilde{Q}}$ 与姿态真实值 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{true}}$ 相互独立，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 可简化为：

$$\boldsymbol{M} \approx 2\boldsymbol{I} - 2\sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}} \quad (22)$$

令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}$，该项描述了定姿参考矢量的相对几何分布情况，称为矢量分布矩阵。将式(22)代入式(21)，并结合式(17)可得到：

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{A}^{-1} \delta \boldsymbol{Z} \quad (23)$$

将式(21)代入式(18)得：

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{Q}} = \boldsymbol{M}^{-1} (\delta \boldsymbol{Z} \delta \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}) \boldsymbol{M}^{-1} \quad (24)$$

其中，$\delta \boldsymbol{Z} \delta \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{w}_i \boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}], \sigma_i^2 = \sigma_{vi}^2 + \sigma_{wi}^2$。对于不等精度观测而言，$a_i$ 的分配应按照加权最小二乘的原则取值：

$$a_i = \sigma_{\mathrm{tot}}^2 / \sigma_i^2, (\sigma_{\mathrm{tot}}^2)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} (\sigma_i^2)^{-1} \quad (25)$$

将以上元素代入式(24)有：

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{Q}} = \frac{1}{4} \sigma_{\mathrm{tot}}^2 [\boldsymbol{I} - \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{w}_i \boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}]^{-1} = \frac{1}{4} \sigma_{\mathrm{tot}}^2 \boldsymbol{A}^{-1} \quad (26)$$

根据式(19)，最终可得到欧拉角协方差阵 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\phi}}$：

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\phi}} = \sigma_{\mathrm{tot}}^2 \boldsymbol{A}^{-1} \quad (27)$$

因此，QUEST 定姿算法精度与观测误差的方差 σ_{tot}^2 及矢量分布矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相关。

4.3 误差统一关系

当观测矢量组只有两个矢量时，式(27)转换为式(28)。

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\phi}} = \sigma_{\mathrm{tot}}^2 \boldsymbol{I} + |\boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2|^{-2} [(\sigma_2^2 - \sigma_{\mathrm{tot}}^2) \boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}} + (\sigma_1^2 - \sigma_{\mathrm{tot}}^2) \boldsymbol{w}_2 \boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}} + \sigma_{\mathrm{tot}}^2 (\boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{w}_2)(\boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{w}_2 \boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}})] \quad (28)$$

式(28)建立了 TRAID 算法与 QUEST 算法在进行双矢量观测条件下的统一关系。下面分析两种特殊情况。当两次观测精度为等精度观测时，此时存在 $\sigma_{\mathrm{tot}}^2 = 0.5\sigma_1^2$，代入式后与式对比可得：

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{TRAID}} = 2\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{QUEST}} \quad (29)$$

式(29)说明在等精度观测条件下 QUEST 算法的精度是 TRAID 算法的 2 倍。当两个观测矢量精度差异较大，尤其是当 $\sigma_2 >> \sigma_1$ 时，QUEST 算法权重参数 $a_2/a_1 \rightarrow 0$，存在 $\sigma_{\mathrm{tot}}^2 = \sigma_1^2$。此时存在关系式：

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{TRAID}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{QUEST}} \quad (30)$$

在这种情况下 QUEST 算法与 TRAID 算法在精度上是等价的，QUEST 算法不具有精度优越性。因此，在对准应用中要充分发挥 QUEST 算法的精度优势，除了要提高单个矢量的观测精度，同时还要考察不同矢量观测精度的差异性，尽量满足等精度观测条件。

5 仿真分析

5.1 仿真条件

仿真时间设为 300 s，仿真步长为 0.01 s。选取中等精度 IMU 作为仿真对象：陀螺仪常值漂移为 0.01°/h，随机漂移 0.01°/h；加速度计零偏为 100 μg，随机噪声为 10 μg；器件刻度系数误差均为 50×10^{-6}，安装误差为 5″。载体基座呈周期性摇摆，横、纵摇及航向摆幅分别为 5°，7°和 10°，周期为 7 s、5 s 和 10 s。模型中暂不引入线运动扰动量，对准方案中也不进行抗扰动滤波。

对准中的矢量观测方案采用两种方式，一种直接以惯性系下两个时刻的重力矢量为观测量；另一种方式通过对重力矢量进行积分构建重力积分双矢量。双矢量构建时间分别为 $t_1 = 100$ s，$t_2 = 300$ s，得到矢量 1 与矢量 2。为了分析比较不同矢量定姿算法的定姿精度，仿真中分别采用 4 种典型的定姿算法。算法分别为以矢量 1 为基准的 TRAID1 算法、以矢量 2 为基准的 TRAID2 算法、最优 TRAID 算法以及 QUEST 算法 4 种，分别进行样本为 50 的蒙特卡洛仿真。

5.2　结果分析

在两种观测方案下分别借助四种定姿算法求解 $\boldsymbol{q}_{n_0}^{b_0}$，在重力矢量观测与积分矢量观测条件下，进行 50 次蒙特卡洛实验，方位对准误差结果如图 1、2 所示，统计结果如表 1、2 所示。

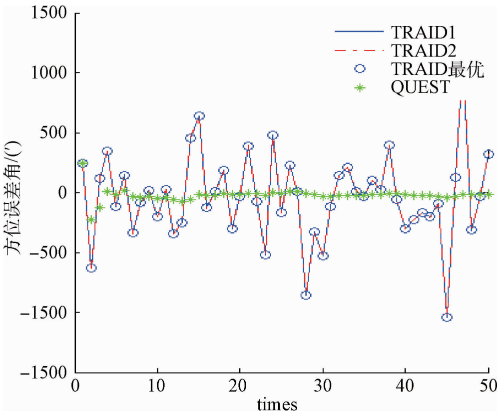

图 1　重力矢量观测方位对准误差

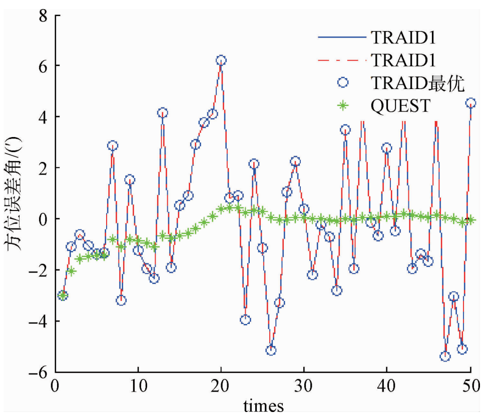

图 2　积分矢量观测对准误差

表 1　重力矢量观测精度统计结果

定姿算法	误差均值/(′)			均方差/(′)		
	$\delta\psi$	$\delta\gamma$	$\delta\theta$	$\delta\psi$	$\delta\gamma$	$\delta\theta$
TRAID1	−76.7	52.2	−33.3	942.4	104.2	362.8
TRAID2	−55.2	52.3	−35.8	893.9	102.6	365.9
TRAID 最优	−55.1	52.3	−35.9	894.0	102.4	365.8
QUEST	−57.9	4.4	−23.1	141.8	8.7	52.7

对比表 1 与 2 可以发现，基于积分矢量观测的定姿精度也明显高于重力矢量观测方案。因此采用积分方案可有效降低矢量观测误差，对于提高 $\boldsymbol{q}_{n_0}^{b_0}$ 的解算精度进而提高惯性系对准精度具有积极作用。

表 2　积分矢量观测精度统计结果

定姿算法	误差均值/(′)			均方差/(′)		
	$\delta\psi$	$\delta\gamma$	$\delta\theta$	$\delta\psi$	$\delta\gamma$	$\delta\theta$
TRAID1	2.7	−0.16	1.1	8.4	0.5	3.1
TRAID2	2.9	−0.16	1.1	8.3	0.5	3.1
TRAID 最优	2.8	−0.16	1.1	8.3	0.5	3.1
QUEST	2.4	−0.14	0.9	1.2	0.07	0.4

结合误差分布与统计结果可以对比分析四种定姿对准方法的精度差异。其中，3 种 TRAID 算法精度虽然存在一定差异但是相差不大，由于两种观测方案下的双矢量观测精度相差不大，优化算法并未体现出精度优势。然而，在等精度观测条件下，QUEST 定姿算法精度要高于 TRAID 算法。表 1 与 2 结果均表明，无论采用何种观测方式 QUEST 算法精度均高于传统的 TRAID 算法精度，其中方位误差均方差约为 TRAID 算法的 1/6，说明在惯性对准中采用 QUEST 算法可有效提高对准的精度稳定性。

6　结　　论

本文针对性推导了惯性系对准中 QUEST 定姿算法的精度特性及其与传统定姿算法精度的统一关系。理论与实验分析均表明，惯性系对准阶段，基于重力信息及重力积分信息的双矢量定姿观测均可看作等精度观测，此时 QUEST 算法定姿精度要高于 TRAID 算法，这为该算法引入晃动基座精对准提供了理论依据。

参考文献

[1]　孙枫，孙伟. 摇摆基座下旋转捷联系统粗对准技术研究[J]. 仪器仪表学报，2010，31(4)：929-936.

[2]　孙枫，曹通. 基于重力信息的惯性系粗对准精度分析[J]. 仪器仪表学报，2011，32(11)：2409-2415.

[3]　秦永元，梅春波，白亮. 捷联惯性系粗对准误差及数值问题分析[J]. 中国惯性技术学报，2010，18(6)：649-652.

[4]　王勇军，徐景硕，盛怡，等. 基于最优三轴姿态测定算法的舰载惯导粗对准方法[J]中国惯性技术学报，2013，21(2)：294-297.

[5]　SILSON P M G. Coarse alignment of a ship’s strapdown inertial attitude reference system using velocity Loci [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement，2011，60(6)：1930-1941.

[6]　王跃钢，杨家胜. 晃动基座下捷联惯导的抗干扰自对准算法[J]. 控制与决策，2014，29(3)：1-4.

（下转第 89 页）