

数字信号处理中的 Gibbs 效应及其抑制算法的研究

肖唐良

(中国电子科技集团公司第四十一研究所,电子测试技术国防科技重点实验室 青岛 370200)

摘要: 为了消除时频域转换过程中在边界点或间断点存在的 Gibbs 现象,提高转换后数据的准确度;首先通过分析时频域转换过程中 Gibbs 现象的形成机理,针对时域加窗引入边界点或间断点导致的振荡误差,引入了根余弦窗函数。为了更好地抑制起伏振荡误差,提出了一种改进的根余弦-凯撒窗函数。通过 MATLAB 仿真和数据对比;根余弦-凯撒窗函数能有效地抑制了起伏振荡误差,消除了 Gibbs 现象。仿真结果证明了算法的有效性。

关键词: 起伏振荡误差;根余弦函数;根余弦-凯撒窗函数

中图分类号: TN98 **文献标识码:** B **国家标准学科分类代码:** 510.40

Gibbs effect on pulse extraction and its suppression algorithm

Xiao Tangliang

(The 41st Research Institute of CETC, National Key Lab of Electronic Measurement Technology, Qingdao 370200, China)

Abstract: In order to eliminate the Gibbs phenomenon existing in the boundary point or discontinuity in the process of time-frequency domain conversion and improve the accuracy of the data after transformation, a method for pulse extraction, which uses root-raised cosine function during extracting pulse, for the rolling oscillation error because of the boundary or break point introduced by rectangle window at time domain, is introduced, by analyzing the causes of the Gibbs phenomenon in the process of time-frequency domain conversion rolling oscillation error in the process of rectangle window extraction. In order to restrain Rolling oscillation error, an advanced method, which is root-raised cosine Kaiser extraction, is proposed. It could be found that the Gibbs phenomenon is eliminated by the root-raised cosine Kaiser extraction through MATLAB simulation and comparison of the data. The effectiveness is proved by the simulated result at last.

Keywords: rolling oscillation error; root-raised cosine function; pulse extraction; algorithm of root-raised cosine Kaiser extraction

1 引言

矢量网络分析仪在测试网络的反射或传输参数时,由于多径效应,其所测幅频特性是多个传输路径幅频特性的迭加,为了测量所期望的一个或多个传输路径幅频特性,采用时域门技术。时域加门人为引入边界点或间断点,使得信号在时频域转换过程中在边界点或间断点存在 Gibbs 现象,影响转换后数据的准确度。

文献[1-3]在数学上推导了 Gibbs 现象产生的机理;文献[4]采用镶边法消除 Gibbs 现象,但计算时间长,且复杂。改变滤波因子长度法^[5]也是消除 Gibbs 现象的有效手段,采用该方法需先做频谱调查、掌握频谱情况。通过以端点为轴对称延长数据长度,以翻转后数据为转换的输入数据的数据翻转法^[6]对波形长度较短的信号抑制效果明显,但

不适用大数据量的快速转换。文献[7]采用基于间断有限元的限制算子法经过多次迭代抑制 Gibbs 现象。文献[8]采用并行配准算法抑制图像边缘 Gibbs 现象,但效果取决于先验抑制条件。

本文在简单分析 Gibbs 现象形成机理的基础上,针对 Gibbs 效应引入的由于边界点或间断点导致的振荡误差,利用根余弦窗函数没有不连续点、平滑的特性和 kaiser 函数主瓣宽度和旁瓣幅度大小可控的特点;提出根余弦函数与 kaiser 函数相结合的新窗函数,通过 MATLAB 仿真,该窗函数能有效抑制 Gibbs 现象。

2 振荡误差分析

在信号处理中,因为幅度平坦、群延时恒定,矩形窗函数作为滤波抽取函数得到广泛应用。因为满足狄利克雷条

件,所以存在傅里叶变换,其对应的频域表现形式是一个辛克函数。辛克函数不能绝对可积,但是能量有限,在均方意义下收敛。以辛克函数的傅里叶反变换来截断近似表示的门函数在连续点处收敛于矩形窗函数,在不连续点处收敛于不连续点处两边值的平均值,收敛的同时在不连续点附近存在起伏振荡现象,这一现象就是 Gibbs 现象。Gibbs 现象随着变换点数的增加,波峰宽度减小,但是波动幅度不变,超出原值约 9%。一个不连续信号的傅里叶反变换的截断近似表示,一般来说,在不连续点处附近存在高频起伏和超量。作为滤波抽取函数,矩形函数对数据影响很大,特别是单脉冲信号。下面具体分析 Gibbs 如何引入数据误差。

假设信号为多脉冲信号,表示为:

$$S(k) = \sum_{i=1}^M A_i e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_i} \quad (1)$$

式中: A_i 、 n_i 为第 i 个脉冲的幅度和位置, M 为脉冲数, N 为数据长度。抽取函数为:

$$G(k) = \frac{\sin(2\pi(\tau+0.5)k/N)}{\pi k/N} e^{-j2\pi k(n_1+n_2)/2N} \quad (2)$$

式中: $k = 1, 2, 3, \dots, N$, n_1 、 n_2 分别为时宽的下、上限, $\tau = (n_2 - n_1)/2$ 为时宽的一半。假设抽取的是第 i 个脉冲,抽取后信号为 $R(k)$, 则:

$$R(k) = A_i \sum_{n=\max(1, k+1-N)}^{\min(k, N)} \frac{\sin\left(\frac{2\pi n(\tau+0.5)}{N}\right)}{\frac{\pi n}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}n\left(\frac{2\tau}{N} + (k-n)n_i\right)} \quad (3)$$

由式(3)可以看出, $R(k)$ 是 k 的函数,因为序列 $\sin(2\pi n(\tau+0.5)/N)/\pi n/N$ 不是绝对可和序列,故 $R(k)$ 各频率点上的幅度并不等于 A_i ; 但是其序列能量有限,使得 $R(k)$ 的幅度均方收敛于 A_i 。 $S_i(k)$ 、 $R(k)$ 在各频率点上幅度虽然不同,但在整个频率范围内能量接近,当 N 趋向无穷大时,能量一致。这使得抽取后脉冲的幅度围绕抽取前脉冲幅度上下振荡,在数据样本有限时引入误差。脉冲和抽取后脉冲的幅频特性分别如图 1 中的蓝、红色图形。

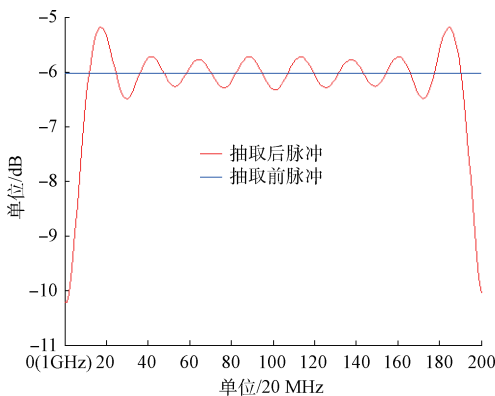


图 1 矩形窗函数抽取脉冲与脉冲的幅频特性

3 根余弦窗函数抽取算法

针对 Gibbs 效应引入的振荡误差,为了改善抽取脉冲的幅度平坦度,可以适当增加窗内数据长度。但是增加数据长度必然增加需要待处理数据量,也增加了后续处理的数据量;从而提高计算机的处理时间,对计算机的存储系统提出更高的要求。在保持原数据长度的情况下,本文引入一个新的窗函数来抽取脉冲信号,这个算法称为根余弦窗抽取算法。

3.1 根余弦函数^[9-10]

用来抽取脉冲的函数窗函数,没有不连续点,满足下面的公式:

$$p(t) + p(t-2\tau) + p(t+2\tau) = 1 \quad (4)$$

满足此公式的函数很多,本文选择余弦函数作为矩形窗的平滑函数,称之为根余弦函数。根余弦窗函数包含 1 个平坦部分和 2 个具有滚降特性的弦形波部分,没有不连续点,从而避免 Gibbs 效应引入的振荡误差。根余弦函数的表示式如下:

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |t| \leq (1-\alpha)\tau \\ \frac{1}{2} \left[1 - \sin \frac{\pi(|t|-\tau)}{2\alpha\tau} \right] \cdot (1-\alpha), & \tau \leq |t| \leq (1+\alpha)\tau \\ 0, & |t| \geq (1+\alpha)\tau \end{cases} \quad (5)$$

式中: α 为滚降系数, τ 为时宽。在抽取脉冲信号的时候,可以根据脉冲信号的具体情况通过改变 α 和 τ 来控制窗函数的有效选择宽度和平滑程度。 $\alpha = 0$, $p(t)$ 即为矩形窗;随着 α 的增加,当 $\alpha = 1$, $p(t)$ 即为余弦窗。其频率响应为:

$$p(j\omega) = \frac{2\pi^2 \cos(\alpha\omega\tau)}{(\pi^2 - 4\alpha^2\tau^2\omega^2)} \times \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} \quad (6)$$

频率响应包含两个因子:一个是矩形窗选择特性的 $\sin(\omega\tau)/\omega$;一个是当 ω 增大时,以 $1/|\omega^2|$ 的速度减小的因子。第 1 个因子筛选脉冲信号,第 2 个因子保证窗函数的收敛性。由式(5),可以看出根余弦窗函数是一个平滑的抽取函数,没有不连续点。在同等时宽的前提下,其第一旁瓣的幅度比矩形窗函数的第一旁瓣要低,但是主瓣宽度比矩形窗函数的主瓣宽度要小;随着频率的增大,幅度也变得更小。利用根余弦函数作为窗函数以抽取脉冲的算法就是根余弦抽取算法。不同于矩形窗函数、汉明窗、三角窗、Blackman 窗和 Hann 窗等形状固定的窗函数,根余弦窗函数还可以通过改变 α 值调整形状,进而控制主瓣宽度的大小,从而设计的需要的窗函数的形状。由于滚降系数在 $[0, 1]$ 取值,根余弦窗函数的主瓣宽度压缩有限,对起伏振荡误差的抑制无法满足精度要求。为了更加有效地抑制起伏振荡误差,在根余弦窗函数的基础上,需要进一步压缩抽取窗函数的主瓣宽度。

3.2 根余弦-凯撒抽取算法

由式(6)可知,当 $0.5 < \alpha \leq 1$ 时,主瓣为 $1/4\alpha\tau$, 在 $1/4\tau \sim 1/2\tau$ 之间取值;当 $0 \leq \alpha \leq 0.5$ 时,主瓣为 $1/2\tau$ 。通过粗略的分析,根余弦抽取算法的主瓣压缩有限。为了进一步压缩抽取窗函数的主瓣,将根余弦函数与形状可调没有不连续点的窗函数相乘,然后以这个组合的窗函数抽取感兴趣的区域的信号。在常用的窗函数中,凯撒窗^[11]是一种应用广泛的可调窗函数,它可以通过改变窗函数的形状来控制主瓣宽度和旁瓣幅度大小。凯撒窗如下:

$$w(n) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - (1 - 2n/N)^2})}{I_0(\beta)} \quad (7)$$

式中: $0 \leq n \leq N$, $I_0(\beta)$ 零阶第一类修正贝塞尔函数,对任何变量,其值均为正。在实际计算中,一般求和 20 项就能达到所需要的精度。根余弦函数和凯撒窗函数组合的窗函数就称为根余弦-凯撒窗函数,采用这个窗函数截取信号的算法就是根余弦-凯撒抽取算法。

4 基于 MATLAB 仿真实验

输入信号是由 5 个等幅脉冲信号组成的脉冲串信号,为 $S(f) = 0.5e^{-j2\pi ft}$,其中 $t = [2.5 \text{ s} \ 3 \text{ s} \ 3.5 \text{ s} \ 4 \text{ s} \ 5 \text{ s}]$ 为脉冲时域位置。输入信号在仪器中显示的频率范围 1~5 GHz,数据长度为 201,其幅频特性如图 2(a),图 2(b)是输入信号经 CZT 逆变换的时域波形。为了从输入信号中抽选出所需要的任意一个或多个脉冲信号,采用了矩形窗函数抽取和根余弦窗函数抽取这 2 种不同的抽取算法。为了便于比较,这里抽取的是 5 s 位置上的脉冲。为了抽取这一脉冲,采用的矩形函数时宽上、下限分别为 5.5、4.5 s 的矩形窗函数,得到的脉冲信号幅频特性如图 2(c)中的蓝色图形;信号幅度平坦度,以幅度最大最小差值表示的是 5.024 dB,其波形如图 2(d)中的蓝色波形。

为了方便比较,采用根余弦窗函数应与矩形抽取函数的时宽相同,所以取 $\tau = 0.25$ 、 $\alpha = 0.48$,抽取的脉冲信号的幅频特性如图 2(c)中红色图形,信号幅度平坦度,以幅度最大最小差值表示的是 1.564 dB;其波形如图 2(d)中的绿色波形。跟矩形抽取相比,根余弦抽取的脉冲幅度起伏振荡的幅度变小,信号幅度平坦度变小,更接近与理论上

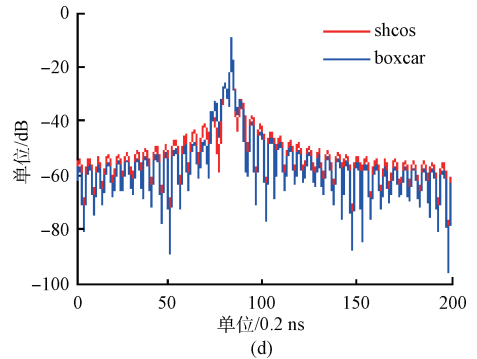
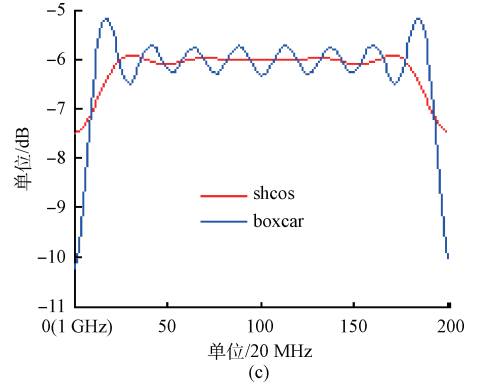
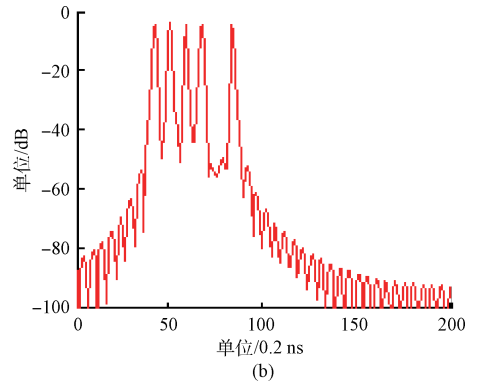
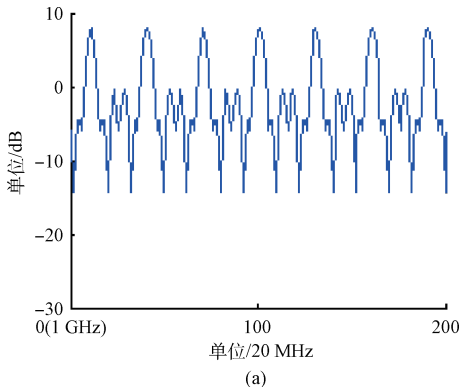


图 2 (a)脉冲信号幅频图;(b)脉冲信号波形图;(c)抽取脉冲幅频图;(d)抽取脉冲波形图

脉冲信号的幅频特性。采用根余弦函数抽取脉冲还可以通过改变滚降系数 α 来改善信号幅度平坦度。图 3 中红、绿、

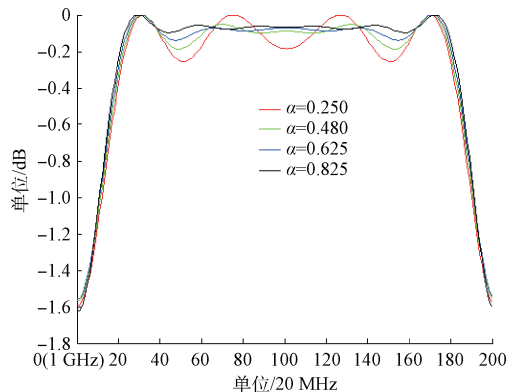


图 3 不同滚降系数下脉冲抽取幅频图

蓝、黑色图像分别对应 α 为 0.250、0.480、0.625、0.825 时抽取脉冲的幅频特性图；对应的幅度平坦度如表 1 所示。

表 1 不同滚降系数下的平坦度

滚降系数	0.250	0.480	0.625	0.825
根余弦窗/dB	1.589 8	1.564 4	1.557 0	1.623 5
根余弦-凯撒窗/dB	0.176 7	0.167 2	0.192 3	0.242 1

为了更好地改善信号幅度平坦度，在抽取函数后再加一级 Kaiser 窗处理，Kaiser 窗在根余弦窗函数时宽范围内取值。在 $\tau = 0.25$ ， $\alpha = 0.48$ ，根余弦抽取的脉冲信号幅度平坦度为 1.564 4 dB；根余弦-凯撒抽取算法抽取的脉冲信号幅度平坦度为 0.167 2 dB，如表 1。图 4 中的红、绿、蓝、黑色、星点图像分别对应 $\tau = 0.25$ 时 α 为 0.250、0.480、0.625、0.825 的根余弦-凯撒窗抽取脉冲和 α 为 0.480 的根余弦抽取脉冲的幅频特性。仿真实验的结果证明，根余弦抽取算法虽然可以抑制 Gibbs 效应引入的起伏振荡误差，改善脉冲信号的幅度平坦度，但效果有限，不能满足精度需求。与根余弦抽取相比，根余弦-凯撒抽取脉冲的幅度平坦度降低了一个数量级，改善效果显著。

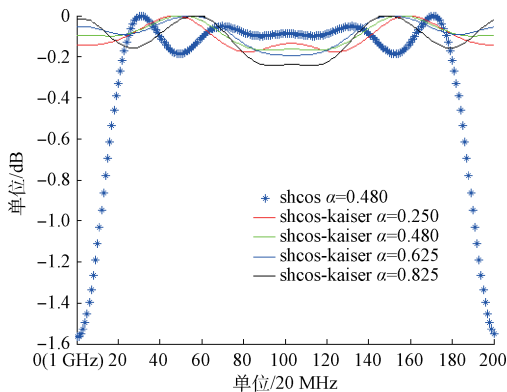


图 4 根余弦抽取和根余弦-凯撒窗抽取

4 结 论

通过分析矩形窗函数抽取脉冲的幅度起伏振荡误差的成因，为了抑制起伏振荡误差，引入根余弦抽取算法，在其

基础上提出根余弦-凯撒抽取算法。仿真实验的结果显示，根余弦-凯撒抽取算法能很好地抑制起伏振荡误差，有效改善抽取脉冲的幅度平坦度。根余弦-凯撒抽取算法虽然有效地抑制了起伏振荡误差，但是浪费了时宽；且只适用于抽取单脉冲信号的情况，这也是其有待改进的地方。

参 考 文 献

- [1] 王亚琴. 对一类吉布斯现象解释方法的改进[J]. 常州工学院学报, 2009, 22(3): 47-51.
- [2] 李彦, 王国江, 卢虎. 基于 Matlab 的“Gibbs 现象”的仿真研究 [J]. 西安石油学院学报, 2000, 15(3): 54-56.
- [3] 李克勤, 姜翠香. 吉布斯现象的 MATLAB 实现 [J]. 三峡大学学报, 2006, 28(3): 269-270.
- [4] 纪跃波. 有限区间信号边界效应问题的研究 [J]. 振动与冲击, 2002, 28(4): 108-112.
- [5] 武喜尊. 试论数字滤波中吉布斯现象的产生与消除 [J]. 中国煤田地质, 1996, 8(4): 68-70.
- [6] 王琼, 王秀芳, 潘淑琴. 消除 Gibbs 现象的仿真研究 [J]. 自动化技术与应用, 2004, 23(8): 21-24.
- [7] 杨学强. 计算流体力学中抑制 Gibbs 效应的新方法 [J]. 科学技术与工程, 2013, 13(1): 112-115.
- [8] 叶宗民, 田振杰, 王东阳. 采用边缘 Gibbs 现象抑制的红外图像 PoCS 重构算法 [J]. 红外, 2015, 36(4): 38-41.
- [9] 赵林军. 根升余弦脉冲成形滤波器 FPGA 的实现 [J]. 现代电子技术, 2011, 34(1): 23-25.
- [10] 张会生, 王效洪, 耿光辉. 基于 FPGA 实现根升余弦滤波器的研究 [J]. 无线通信, 2005, 2(2): 46-49.
- [11] 高云鹏, 腾召胜, 温和, 等. 基于 Kaiser 窗的相位差校正及 $\tan\delta$ 测量应用 [J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2009, 36(4): 48-52.

作 者 简 介

肖唐良, 1981 年出生, 硕士研究生, 中国电子科技集团公司第四十、四十一研究所, 工程师, 主要研究数字信号处理方向。