

基于 DFT 插值的频率测量技术

季 鸣 何玉珠

(北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院 北京 100191)

摘要: 在对控制舱电源频率以及控制舱反馈信号频率测试过程中时,传统测试方式对噪声、温度等电路干扰很敏感,精度难以达到要求。采用离散傅里叶变换插值分析法,先通过快速傅里叶变换分析信号的频谱,然后探讨了直接计算的误差来源和减小误差的常用方法,并选用插值方法来获得更精确的结果。最后,实验验证表明了测量结果在要求的精度范围内,可以满足使用要求。

关键词: 频率测量;离散傅里叶变换;插值法

中图分类号: TP206.1 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 590.30

A method of frequency measurement based on DFT interpolation

Ji Ming He Yuzhu

(School of Instrumentation Science and Opto-electronics Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: when measuring the frequency of the control module's power and the feedback signal, traditional measuring methods susceptible to noise, temperature and circuit parameters. It is difficult to achieve the required accuracy for these methods. In this paper, a discrete Fourier transform and interpolation analysis method will be used, using the fast Fourier transform to analysis signal's spectrum first. Then It discusses the causes of error and method for reducing errors and improving accuracy by interpolation method. Finally, the experiments showed that the measurement results within the accuracy requirements. The method can meet the requirements of using.

Keywords: measuring the frequency; discrete Fourier transform; interpolation method

1 引 言

对信号进行频率检测是信号处理中的常见问题,在通信、电力、电子对抗和振动信号处理等领域都有广泛应用^[1]。在对某型控制舱进行测试过程中,电源频率以及陀螺反馈、舵反馈信号频率的检测是一个重要的测试内容,而且对检测结果的精度要求较严格,故有必要研究更加精确且快速的频率检测方式。

目前对频率的检测方式通常有两种:以硬件电路为主的检测和基于采集板卡的软件检测,硬件检测对噪声、温度等电路干扰很敏感,精度难以达到要求^[2];基于板卡的软件检测中,借助于 Music 算法、AR 模型算法等,可以做到对信号的频率进行准确的估计,但计算复杂,无法达到快速性的要求^[3]。对于频率检测问题,实际工程应用中通常是先采用离散傅里叶变换分析法,并辅以其它校正方法来确保计算的准确性^[4]。因此,本文借助于离散傅里叶变换,同时使用插值算法进行精确修正,实现了在对控制舱测试过程中各个频率测试项快速而准确的测量。

2 基于 DFT 插值的频率测量

2.1 离散傅里叶变换

首先对频率为 f_0 的信号进行采样,采样时间为 T ,采样率为 f_s ,被测信号的幅值为 a ,初始相位为 θ 。可得到的 N 点采样序列为:

$$x(n) = a \sin(2\pi n f_0 / f_s + \theta) \quad (1)$$

进而 $x(n)$ 的 N 点 DFT 变换为:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn} \quad (2)$$

由于 DFT 变换频谱的对称性,可以不考虑负频率成分,取前 $N/2$ 个点,有:

$$X(k) = \frac{a \sin\left[\left(\frac{2\pi k}{N} - 2\pi \frac{f_0}{f_s}\right) \frac{N}{2}\right]}{2 \sin\left[\left(\frac{2\pi k}{N} - 2\pi \frac{f_0}{f_s}\right) \frac{1}{2}\right]} e^{j[\theta - ((N-1)/2)(2\pi k/N - 2\pi f_0/f_s)]} \quad (3)$$

设最大谱线所在位置的索引是 m ,根据 DFT 变换的物理意义,有:

$$m = N \frac{f_0}{f_s} \quad (4)$$

故在 $X(k)$ 的幅度谱中进行搜索,找到最高谱峰位置对应的 m ,则在理想情况下信号频率 f_0 可以用式(5)计算:

$$\hat{f}_0 = m \frac{f_s}{N} \quad (5)$$

2.2 误差分析

1) 栅栏效应

通过 DFT 变换所得的频谱是离散的,在采样率为 f_s , 采样点为 N 的情况下,频谱图中只有如下频率点的信息:

$$f_i = i \cdot \frac{f_s}{N}, i = 0, 1, 2, \dots, N/2 \quad (6)$$

其余频率的频谱信息则无法显示,被测信号的频率如果不在频谱图中,而是处于 2 个离散频谱(2 根谱线)之间,这 2 根谱线相当于从栅栏中观察到的风景,实际需要的频谱被挡在栅栏后无法直接观测,导致不能直接从频谱中得到精确的结果,只能对该信号频率附近的谱线进行处理,估计被测信号的频率^[5]。

2) 频谱泄露

由于实际采样中采样序列是有限的,计算机只能对有限的信号进行处理,这相当于只截取了一段信号,由此必然产生一定的误差。截取可以理解对原信号乘了一个加窗函数,即:

$$y(n) = x(n)w(n) \quad (7)$$

式中: $x(n)$ 为原始采样信号离散序列, $w(n)$ 为窗函数序列,由卷积定理可以得到,变换后的频谱为:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) W(e^{j\omega}) \quad (8)$$

显然与原序列的频谱不同。可见,直接对采样来的信号进行频谱分析会产生误差,表现为原本离散的谱线展宽和谱间干扰等情况,即所谓的频谱泄露。

因此,为了减小频谱泄露的影响,可以采取不同形式的窗函数,或者增大窗函数序列的长度,增加采样点数 N ,使窗函数的主瓣变窄,提高频率分辨率^[6]。

综合上述分析得到,为了减小离散傅里叶变换估计频率的误差,可以采取的方法有:选择合适采样频率;增大 DFT 截取长度;改变窗函数的形式;使用插值算法对结果进行修正,进一步得到更精确的频率值^[7]。

第一种方法受硬件采集板卡的限制,第二种和第三种可减小误差,但并不能完全消除频谱泄露的影响,第四种方法最具有灵活性,并且使用方便简单,下面介绍三种常用的插值算法。

2.3 插值校正方法

离散频谱序列 $X(k)$ 中,其幅值最大值所对应的离散频率索引记作 m , $m = \text{int}[Nf_0/f_s]$, int 为取整函数,当 N 较大时, $X(m)$ 幅值表达式可以近似为:

$$|X(m)| = \frac{Na \sin(\pi\delta)}{2\pi\delta} \quad (9)$$

式中: $\delta = (f_0 - m\Delta f)/\Delta f$ 为被测信号频率与频谱中最大幅值 $X(m)$ 所对应频率的相对偏差, $\Delta f = 1/T$, δ 的范围取值为 $(-0.5, 0.5)$, 在紧临 m 的两条谱线中幅值较大处,也就是在整个频谱中谱线幅值次大处, $X(m \pm 1)$ 的幅度可近似表示为:

$$|X(m \pm 1)| = \frac{Na |\sin(\pi\delta)|}{2\pi(1 - |\delta|)} \quad (10)$$

2.3.1 Rife-Jane 方法

Rife-Jane 插值方法比较简单,先找到频谱中上述 3 条谱线所处的位置: $X(m)$ 、 $X(m+1)$ 、 $X(m-1)$,比较找出次大幅值谱线,然后直接用最大与次大 2 条谱线幅值比值估计信号的实际频率。频率校正公式为:

$$\hat{f}_0 = (m + \delta)\Delta f \quad (11)$$

式中:

$$\delta = \begin{cases} \frac{|X(m+1)|}{|X(m+1)| + |X(m)|} & |X(m+1)| \geq |X(m-1)| \\ \frac{-|X(m-1)|}{|X(m-1)| + |X(m)|} & |X(m+1)| < |X(m-1)| \end{cases} \quad (12)$$

优点是算法比较简单,易于实现,且一般情况下,频谱主瓣内的次大谱线 $X(m \pm 1)$ 的幅值永远大于旁瓣幅值,算法插值方向不会出错。缺点是在采集信号受到噪声干扰时,可能会存在频谱中第一旁瓣的幅值大于主瓣内次大谱线的幅值的情况,从而造成计算频率插值方向相反,产生较大的计算误差^[8]。

2.3.2 Vetterling 方法

该方法同样先找到频谱中上述的 3 条谱线所处的位置: $X(m)$ 、 $X(m+1)$ 、 $X(m-1)$,但不需要找出次大幅值谱线,而是直接用 3 个谱线的幅值对信号的频率进行校正,校正公式仍为式(11),其中:

$$\delta = \frac{|X(m+1)| - |X(m-1)|}{4|X(m)| - 2|X(m+1)| - 2|X(m-1)|} \quad (13)$$

该方法不需要比较最大谱线两侧谱线的大小,故具有计算简单快捷等优点,但是在有噪声的情况下,同样存在校正精度不高,性能较差等问题^[9]。

2.3.3 Quinn 插值法

设 $X(k)$ 的频谱中, $X(m)$ 、 $X(m+1)$ 、 $X(m-1)$ 分别表示幅值最大谱线及其两侧的谱线,其中一个为幅值次大谱线,定义:

$$\alpha_1 = R\left(\frac{X(m-1)}{X(m)}\right) \quad (14)$$

$$\alpha_2 = R\left(\frac{X(m+1)}{X(m)}\right) \quad (15)$$

其中 $R(x)$ 表示取 x 的实部,再计算:

$$\delta_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \quad (16)$$

$$\delta_2 = -\frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} \quad (17)$$

则插值可通过如下方式计算：

$$\hat{\delta} = \begin{cases} \delta_2, & \delta_1 > 0, \delta_2 > 0 \\ \delta_1, & \text{其他} \end{cases} \quad (18)$$

于是,Quinn 插值法对频率估计修正为：

$$\hat{f}_0 = (m + \hat{\delta}) \frac{f_s}{N} \quad (19)$$

假设 θ_1, θ_2 和 θ_3 分别为 $X(k)$ 的频谱中幅值最大谱线、主瓣内幅值次大谱线和第一旁瓣谱线的相位,它们有如下关系：

$$\begin{cases} \theta_1 - \theta_2 = \pi \\ \theta_1 - \theta_3 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Quinn 算法突出的优点是： $X(m-1)$ 与 $X(m+1)$ 的相位因为相差 180° ,所以插值方向不容易受到噪声干扰而出错。Quinn 方法取 $X(m-1)/X(m)$ 与 $X(m+1)/X(m)$ 的实部,正是利用相位关系来决定插值方向,从而避免了插值方向错误导致的误差较大的问题^[10]。

综上所述,本文最终选取 Quinn 插值算法实现对频率的精确估计。

3 频率测量软硬件实现

根据控制舱测试需求,本课题需要对其供电电源及反馈信号进行测量,并显示,这里以研华工控机、数据采集板卡 PCI-1713 为核心,并通过信号调理模块对输入信号进行滤波处理,从而完成硬件搭建,如图 1 所示。

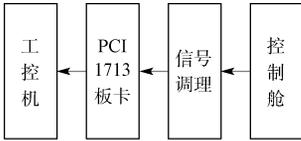


图 1 控制舱频率测量硬件搭建框图

基于上述硬件,软件设计采用 VC++6.0 开发平台,通过调用库函数操作数据采集板卡对信号进行采集,选取合适的序列长度 N 完成 FFT 变换,使用 Tchar 控件显示采集到的数据以及对应的幅度谱,在幅度谱中搜索最大谱线,利用 Quinn 算法计算最终的频率,具体软件流程如图 2 所示。

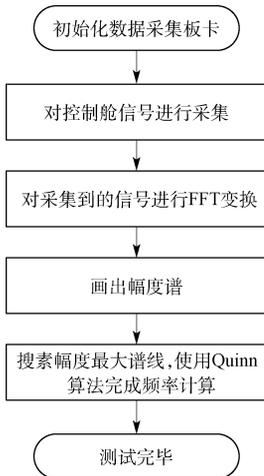


图 2 软件流程

4 实验验证

该型控制舱电源频率标准值为 1 200 Hz,结合上述频率测量方法,主要针对 Quinn 插值算法的精度进行实际验证：

在实验过程中,调整电源频率每隔 10 Hz 从 1 100 Hz 到 1 300 Hz 变化,分别对每种频率进行 10 次采样。设置采样率为 5 000 Hz,对于每次采集的数据选择序列长度 N 为 256,然后进行 FFT 运算,最后搜索最大谱线,根据式 (14)~(19)即可计算出电源信号的频率。

表 1 为所有的计算结果,从中可以看出频率测量精确到 0.1 Hz,满足了测试需求。

表 1 实验数据

实际值/Hz	10 次测量平均值/Hz	10 次测量方差
1 100	1 100.026	0.003 5
1 110	1 110.041	0.008 7
1 120	1 120.052	0.007 6
1 130	1 130.042	0.002 3
1 140	1 140.061	0.001 8
1 150	1 150.040	0.002 9
1 160	1 160.073	0.007 5
1 170	1 169.026	0.004 8
1 180	1 180.067	0.008 2
1 190	1 190.020	0.005 1
1 200	1 200.003	0.006 3
1 210	1 210.002	0.003 6
1 220	1 220.080	0.007 5
1 230	1 230.034	0.003 9
1 240	1 240.074	0.007 2
1 250	1 250.156	0.008 2
1 260	1 260.062	0.004 9
1 270	1 270.094	0.007 4
1 280	1 280.030	0.006 5
1 290	1 290.010	0.003 7
1 300	1 300.050	0.006 4

5 结 论

本文研究了离散傅里叶变换分析法在频率测量中的应用及产生误差的原因,并用 Quinn 插值算法得到更为精确的结果,以此解决对某型控制舱供电电源及反馈信号频率的测试任务,实验证明该方法精度较高,抗干扰能力强,能满足实际需求。

(下转第 75 页)